

## ارزیابی روش‌های تکراری زیرفضای کريلف برای محاسبه جریان سیال در شبکه شکستگی‌های مجزای سه‌بعدی

سپهیل مهاجرانی<sup>۱</sup>، سیدمحمداسماعیل جلالی\*<sup>۲</sup>، سیدرحمان ترابی<sup>۳</sup>

۱- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

۲- دانشیار، دانشکده مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

۳- استاد، دانشکده مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

(دریافت: آذر ۱۳۹۶، پذیرش: خرداد ۱۳۹۷)

### چکیده

محاسبه جریان سیال در محیط‌های سنگی درزه‌دار یکی از موضوعات بسیار مهم در مباحث تراوایی در مهندسی سنگ است. توده‌سنگ شامل شبکه درهم‌تنیده‌ای از ماده‌سنگ و شکستگی‌ها است. تعداد و الگوی اتصال‌پذیری شکستگی‌ها دو عامل کلیدی کنترل‌کننده جریان سیال در توده‌سنگ هستند. یکی از روش‌هایی که می‌تواند ساختار هندسی توده‌سنگ را به دقت‌ترین شکل ممکن نشان دهد، روش شبکه شکستگی‌های مجزا (DFN) است. با توجه به این‌که ناهمگنی و ناهمسانگردی توده‌های سنگی در جهات مختلف می‌تواند در محاسبه جریان سیال بسیار اثرگذار باشد، روش شبکه شکستگی‌های مجزای سه‌بعدی بیشتر در کانون توجه قرار دارد. محاسبه‌ی عددی جریان در توده‌سنگ مستلزم حل معادلات پرتعداد و پیچیده‌ای است که توسط روش‌های عددی نظیر روش المان محدود تولید می‌شوند. حل دستگاه‌های معادلات مذکور معمولاً ساده نیست و نیازمند روش‌های خاصی است که یکی از بهترین آنها، روش‌های تکراری زیرفضای کريلف است. در این تحقیق پس از اعتبارسنجی محاسبات روش‌های مختلف زیرفضای کريلف با یک روش مستقیم و مدلسازی 3DEC، ارزیابی کارایی این روش‌ها مورد بررسی قرار گرفته و کارآمدترین آنها از طریق یک سری تحلیل‌های حساسیت بر روی پارامترهای دقت و سرعت انجام محاسبات، تعیین شده است. با توجه به تحلیل‌های انجام شده در این تحقیق، روش‌های CG، CR و IOM جزو سریع‌ترین و دقیق‌ترین روش‌های زیرفضای کريلف انتخاب شده‌اند. نتایج این پژوهش می‌تواند راهنمای خوبی برای پژوهشگرانی باشد که بر روی حل جریان سیال در توده‌سنگ متمرکز هستند.

### کلمات کلیدی

زیرفضای کريلف، روش‌های تکراری، روش المان محدود، DFN سه‌بعدی، جریان سیال، مش‌بندی

\*عهده‌دار مکاتبات: Jalalime@shahroodut.ac.ir

## ۱- مقدمه

کاربردهای روزافزونی در مهندسی سنگ و علوم زمین به طور گسترده مورد استفاده قرار گرفته [۷]. در مواردی که ساخت مدل تحلیلی پیوسته معادل<sup>۳</sup>، مشکل یا ناممکن باشد، روش DFN یکی از شاخص‌ترین روش‌های مطالعه جریان سیال در سنگ‌های شکسته است و یا حتی می‌توان برای محاسبه جریان پیوسته‌ی معادل در توده‌های سنگی نیز از آن استفاده نمود [۸، ۹].

معمولاً برای محاسبه جریان سیال در شبکه شکستگی‌های مجزا، تک-شکستگی‌ها، مش‌بندی و معادلات جریان به صورت صریح در سراسر شبکه، حل می‌شود [۵، ۱۰-۱۵]. مدل DFN بازه بزرگ‌تری از تغییرات مقادیر جریان سیال را در مقایسه با مدل‌های پیوسته معادل که مبتنی بر میانگین‌گیری حجمی است، ارائه می‌کند [۱۶]. مدل ترکیبی<sup>۴</sup> روش دیگری است که مدل DFN را برای کاهش زمان محاسبات، تعمیم داده و ویژگی‌های آن را با تخلخل/رسانایی هیدرولیکی<sup>۵</sup> معادل ادغام می‌کند [۱۷-۱۹].

در روش DFN سه‌بعدی، شکستگی‌ها به صورت مجموعه‌ای از چندضلعی‌های متقاطع دوبعدی، تعبیه شده در فضای سه‌بعدی، مدل‌سازی می‌شود. بیشتر مدل‌های DFN سه‌بعدی، شکستگی‌ها را به صورت مستطیلی یا بیضوی صفحه‌ای نشان داده و به دلیل عدم قطعیت در داده‌هایی که مستقیماً از روی زمین برداشت شده‌اند، پارامترهای مکان، جهت‌یابی و اندازه را به صورت آماری مدل‌سازی می‌کنند. شکستگی‌ها به صورت دسته‌درزه در نظر گرفته می‌شود و برای هر یک از آنها، توزیع احتمال مشخصی از طول، شیب، جهت شیب و مکان مرکز شکستگی در نظر گرفته می‌شود [۲۰]. تابع توزیع طول، جهت‌یابی و مکان مرکز شکستگی‌ها در منابع مختلف معمولاً به ترتیب، توانی/لاگ-نرمال، فیشر و پواسن است [۲۱].

با وجود مزایای DFN در مدل‌سازی جریان سیال در محیط‌های سنگی درزه‌دار، تولید مش‌بندی باکیفیت مناسب برای حل جریان سیال از طریق روش‌های مجزاسازی عددی، یک مشکل اساسی در استفاده از این روش است. همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، بدیهی است که شبکه‌های DFN با شکستگی‌های پرتعداد و با توزیع اندازه‌های مختلف، می‌توانند شامل شکستگی‌های کوچک نیز باشند؛ بنابراین، این مدل‌ها نیازمند یک روش

توده‌سنگ ترکیبی از ماده‌سنگ و ناپیوستگی است. ناپیوستگی‌ها شامل تخلخل، شکستگی، درزه، گسل و صفحات لایه‌بندی هستند و نقش مهمی در حوزه مهندسی سنگ به‌ویژه در برآورد جریان سیال به منظور طراحی و اجرای مخازن زیرزمینی برای ذخیره‌سازی ایمن مواد رادیواکتیو و دفن زباله‌های خطرناک، انتقال آب زیرزمینی در سفره‌ها، حرکت نفت و گاز در مخازن هیدروکربوری و تعیین میزان آبگذری در پی سدها و جداره‌های تونل‌ها دارند. همچنین شکستگی‌های سنگ عامل تعیین‌کننده‌ی در ناپایداری شیب‌های سنگی و معدن‌کاری روباز و زیرزمینی در شرایط وجود آب زیرزمینی به حساب می‌آیند [۵-۱].

نحوه اتصال شکستگی‌ها به یکدیگر (اتصال‌پذیری) در توده‌سنگ، الگوی جریان سیال را تعیین می‌نماید. هنگامی که نفوذپذیری سنگ بکر در مقایسه با نفوذپذیری شکستگی‌ها بسیار کمتر باشد (به ویژه برای سنگ‌های با تخلخل پایین) سیال در امتداد مسیرهای ایجاد شده به وسیله شکستگی‌های متصل به هم جریان می‌یابد. هنگامی که جریان سیال در مدل فیزیکی توده‌سنگ به حد تراوش نزدیک می‌شود، میدان جریان از الگوی اتصال‌پذیری شکستگی‌ها در مقایسه با تعداد آنها، تبعیت بیشتری خواهد کرد. در چنین حالتی، حتی یک تغییر کوچک در نحوه اتصال‌پذیری شکستگی‌ها (به عنوان مثال اضافه شدن یک شکستگی کوچک به مدل) می‌تواند موجب تغییر قابل توجهی در میدان جریان شود [۶].

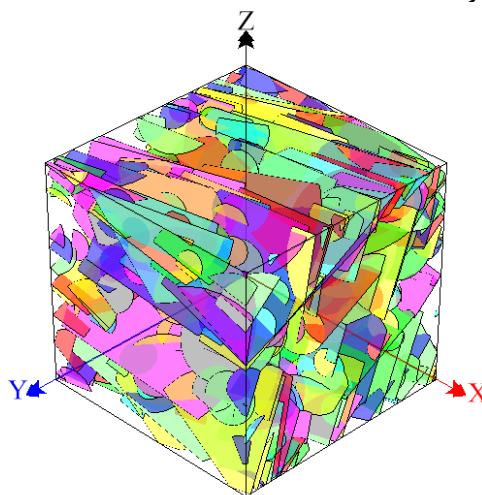
برای دستیابی به میدان جریان در حجم عنصر نماینده (REV<sup>۱</sup>) از توده‌سنگ لازم است مقدار جریان در هر شکستگی منفرد با استفاده از روش‌های تحلیلی و عددی به دست آید. یکی از این روش‌ها روش شبکه شکستگی‌های مجزا (DFN<sup>۲</sup>) است. هنگامی که متن سنگ، صلب و ناتراوا در نظر گرفته شود، می‌توان از قوانین ساده هیدرولیک برای توصیف رفتار شکستگی‌ها استفاده نمود. روش DFN، یک روش ویژه است که با استفاده از آن می‌توان جریان سیال در توده‌های سنگی را در شکستگی‌های به هم متصل مدل‌سازی کرد. این روش در دهه هشتاد میلادی برای مسائل دو و سه‌بعدی توسعه یافت و پس از آن با

یافته است [۲۵]. از آن زمان به بعد، تعداد زیادی از روش‌های عددی ناپیوسته برای تحلیل کوپل هیدرومکانیک مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. از آن جمله می‌توان به کاربردهای مختلفی از روش‌های عددی گوناگون مانند روش المان محدود [۲۶-۲۹]، روش المان مرزی<sup>۱۰</sup> (BEM) [۳۰]، روش المان مجزا<sup>۱۱</sup> (DEM) [۳۱، ۳۲]، روش تحلیل تغییر شکل ناپیوسته<sup>۱۲</sup> (DDA) [۳۱، ۲۴] و روش‌های ترکیبی<sup>۱۳</sup> [۳۳، ۳۴] در حل جریان سیال در توده سنگ برای زمین‌های مختلف مهندسی سنگ اشاره نمود.

اجرای روش المان محدود بر روی ساختار هندسی DFN در شبکه‌هایی با تعداد زیادی از شکستگی‌ها، منجر به تولید ماتریس مجزاسازی بسیار بزرگ و تنگی<sup>۱۴</sup> خواهد شد که افزایش ابعاد آن با افزایش تعداد شکستگی‌ها و در نهایت تعداد رئوس مدل نسبت مستقیم دارد. رئوس مدل نقاطی هستند که در آنها با استفاده از ساختار مش‌بندی، هد هیدرولیکی<sup>۱۵</sup> و میدان جریان محاسبه می‌شود؛ بنابراین، تعداد معادلات سیستم برابر با تعداد کل رئوس مدل خواهد بود. افزایش ابعاد مدل، تعداد صفحات شکستگی و پیچیدگی‌های هندسی شبکه شکستگی‌ها می‌تواند موجب افزایش تعداد رئوس مدل گردد. هر چه تعداد رئوس یک مدل بیشتر شود، فرآیند حل معادلات نیز پیچیده‌تر و به دنبال آن هزینه محاسبات افزایش می‌یابد؛ بنابراین، هدف از این مطالعه تعیین کارآمدترین روش‌های تکراری حل دستگاه‌های معادلاتی است که توسط روش FEM در طی فرآیند تعیین میدان جریان سیال در توده سنگ تولید می‌شود. زمان محاسبات نیز که در این پژوهش در کنار تعیین دقت محاسباتی روش‌های مختلف کرلیف مورد تحلیل قرار می‌گیرد، یکی از شاخص‌های اصلی تعیین هزینه محاسباتی است که می‌تواند معیار مناسبی برای انتخاب بهترین روش‌های تکراری زیرفضای کرلیف باشد.

هر چند، کاربرد روش‌های زیرفضای کرلیف در مطالعات مختلف برای حل دستگاه‌های معادلات، به وفور مشاهده می‌شود، در زمینه تحلیل حساسیت روش‌های مختلف زیرفضای کرلیف در مهندسی سنگ و در ارتباط با محیط سنگی درزه‌دار، مطالعات بسیار محدودی وجود دارد. در این رابطه می‌توان به پژوهش انجام شده توسط پارشار<sup>۱۶</sup> و ریوز<sup>۱۷</sup> در سال ۲۰۱۲ اشاره نمود که بر روی جریان سیال

مش‌بندی خودکار هستند که قابلیت حل جریان در شکستگی‌های کوچک را نیز فراهم کند و همچنین هزینه محاسبات را بیش از حد بالا نبرد. برای این که معادلات جریان در شکستگی‌های کوچک بتواند قابل حل باشد، اندازه المان‌های مش‌بندی در این شکستگی‌ها باید کوچک‌تر از حداقل ابعاد شکستگی باشد. علاوه بر این، دامنه مقیاس‌ها، پیچیدگی هندسی شکستگی‌هایی که باید معادلات جریان در آنها حل شود و لزوم در نظر گرفتن تقاطع بین شکستگی‌ها، مش‌بندی را پیچیده‌تر می‌سازد [۳].



شکل ۱: نمونه‌ای از شبکه شکستگی‌های مجزای سه‌بعدی تولید شده در پژوهش حاضر.

یکی از پرکاربردترین ابزارهای عددی برای حل جریان سیال در مهندسی سنگ، روش المان محدود<sup>۱۸</sup> (FEM) است. هر چند، برخی از پژوهشگران اعتقاد دارند که روش FEM تنها با شرایط خاصی، برای مدل‌های بدون شکستگی یا با تعداد کمی از شکستگی‌ها کاربرد دارد [۲۲]، برای اولین بار، یک مدل عددی ناپیوسته بر اساس روش المان محدود (FEM) به منظور تحلیل کوپل هیدرومکانیک توسط گودمن<sup>۱۹</sup> در سال ۱۹۶۸ توسعه یافته است که در آن، مجموعه‌ای از بلوک‌های متصل به هم با المان‌های فصل مشترک شکستگی‌ها در نظر گرفته شده‌اند [۲۳]. همچنین در سال ۱۹۸۲، یک مدل برای تحلیل کوپل هیدرومکانیک با ادغام تئوری بایوت<sup>۲۰</sup> و روش FEM توسط نوریشاد و همکارانش برای محیط‌های متخلخل ارائه شده است [۲۴]. پس از آن در سال ۱۹۸۶ یک روش تلفیقی المان محدود-المان مرزی (BEM-FEM) نیز برای تحلیل جریان- تغییر شکل در سه‌بعدی توسط السورث<sup>۲۱</sup> توسعه

( $\lambda$ ) که نشان‌دهنده تعداد صفحات شکستگی در واحد حجم است، مکان مرکز شکستگی‌ها در فضا توزیع می‌شود. میانگین توزیع پواسن از رابطه (۱) محاسبه می‌شود [۵].

$$\mu = \lambda \cdot V_m \quad (1)$$

که در آن،  $V_m$  حجم محدوده‌ی مدل است. باید توجه داشت که مرکز برخی از شکستگی‌ها در خارج از محدوده مدل قرار می‌گیرد ولی طول آنها آن قدر زیاد است که وارد محدوده می‌شوند و الگوی اتصال‌پذیری را تحت تأثیر قرار می‌دهند. بنابراین، در ابتدا ابعاد محدوده تولید مراکز شکستگی‌ها بزرگ‌تر از محدوده مدل در نظر گرفته می‌شود و پس از پایان فرآیند تولید شبکه شکستگی‌ها، REV مدل از آن استخراج می‌شود.

یک متغیر تصادفی  $N$ ، از تابع توزیع پواسن با استفاده از رابطه (۲) تولید می‌شود [۵].

$$P(N = n) = e^{-\mu} \frac{\mu^n}{n!} \quad (2)$$

که در آن،  $\mu$  میانگین توزیع است. با استفاده از تابع توزیع یکنواخت دنباله‌ای از اعداد تصادفی  $x_i$  در بازه [۰ و ۱] و ۱۰ زمانی که رابطه (۳) برقرار باشد، تولید می‌شود.

$$\prod_{i=1}^k x_i < e^{-\mu} \quad (3)$$

برای هر  $n = k$  رخداد، سه مقدار با قرار دادن  $P$  در تابع توزیع یکنواخت محاسبه شده و به عنوان مختصات مرکز شکستگی ( $o$ ) در نظر گرفته می‌شود. شکل ۲-الف. تصویری از مراکز شکستگی‌های تولید شده را نشان می‌دهد.

پس از آن، پارامترهای جهت‌یابی (شیب، جهت شیب و زاویه چرخش شکستگی) و طول شکستگی‌ها به کمک توابع توزیع احتمال و نمونه‌سازی مونت-کارلو شبیه‌سازی شده و به هر یک از مراکز هر شکستگی نسبت داده می‌شود. برخی از پرکاربردترین توابع توزیع آماری در جدول ۱ ارائه شده است. معمولاً تابع توزیع یکنواخت برای مدلسازی شیب و تابع توزیع فیشر برای مدلسازی جهت شیب به کار می‌رود. شکل ۳ پارامترهای هندسی شکستگی‌ها را نشان می‌دهد. زاویه چرخش شکستگی‌ها نیز با استفاده از تابع توزیع یکنواخت مدلسازی می‌شود [۳۶].

در محیط DFN دوبعدی متمرکز شده و مدلسازی آن با استفاده از نرم‌افزار UDEC انجام شده است [۳۵].

در این پژوهش به توصیف روند حل جریان با استفاده از روش FEM-کریلف<sup>۱۸</sup> پرداخته می‌شود. به این منظور، DFN سه‌بعدی بر اساس داده‌های خام، تولید شده و سپس با یک الگوریتم بهینه و خودکار مش‌بندی انجام می‌شود و سپس، جریان سیال با استفاده از روش FEM-کریلف، حل می‌شود. در بخش‌های بعدی به توصیف چارچوب هندسی مدل، الگوریتم مش‌بندی متناسب با DFN، روش FEM، اعتبارسنجی مدل و تحلیل حساسیت روش‌های زیرفضای کریلف، پرداخته می‌شود.

## ۲- روش شناسی

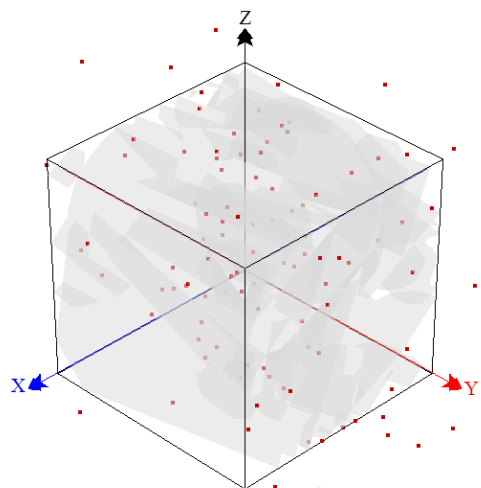
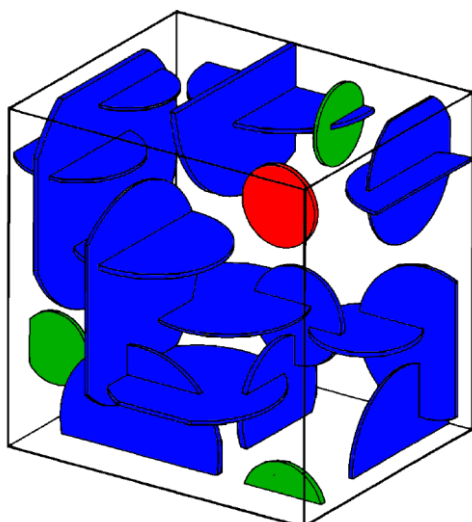
در این بخش به توصیف روش‌ها و الگوریتم‌های مختلف مورد نیاز برای توسعه مدل عددی تحلیل جریان سیال پرداخته می‌شود.

### ۲-۱- چارچوب هندسی مدل

DFN سه‌بعدی، چارچوب هندسی مدل توسعه یافته در این پژوهش را تشکیل می‌دهد، لذا لازم است روش تولید DFN سه‌بعدی به‌اختصار توصیف شود.

بر اساس منشأ زمین‌شناسی، شکستگی‌های موجود در توده‌سنگ به تعدادی دسته‌درزه طبقه‌بندی می‌شوند. طبیعتاً، این دسته‌درزه‌ها، ویژگی‌های هندسی (شیب و جهت شیب) مشابهی دارند. در یک مدل هندسی سه‌بعدی، دسته‌درزه‌ها به کمک نیم‌کره تصویر<sup>۱۹</sup> مشخص می‌شوند. دسته‌درزه‌ها به صورت مستقل از یکدیگر شبیه‌سازی می‌شوند و مدل نهایی مجموعه‌ای از همه آنها خواهد بود. هر دسته‌درزه شامل پارامترهای توزیع هندسی مشخصی مثل مکان مرکز شکستگی، جهت‌یابی (شیب و جهت شیب) و گسترش شکستگی‌های صفحه‌ای است.

مکان مرکز شکستگی، اولین پارامتری است که باید در شبیه‌سازی دسته‌درزه‌ها مورد توجه قرار گیرد. معمولاً روش فرآیند پواسن همگن تک نقطه‌ای برای تعیین مختصات مرکز شکستگی در محدوده مدل به کار می‌رود. در این فرآیند، با داشتن یک عدد ثابت به‌عنوان شدت شکستگی



(الف) مختصات مرکز شکستگی‌ها.

(ب) تصویر شماتیک از انواع شکستگی‌های موجود در شبکه، شکستگی‌های منفرد (قرمز)، بن‌بست (سبز) و با اتصال چندگانه (آبی) [۳۱].

شکل ۲: پیکربندی شکستگی‌ها در شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا

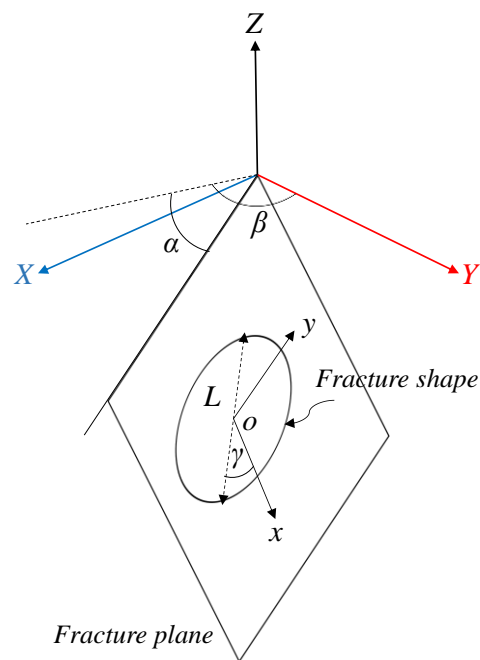
جدول ۱: توابع توزیع احتمال برای تولید شبکه‌ی شکستگی‌های مجزا.

تابع توزیع احتمال	فرمول	پارامترها
یکنواخت	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{O.w} \end{cases}$	$a, b$
فیشر	$f(\theta) = \frac{k \sin \theta e^{k \cos \theta}}{e^k - e^{-k}}$	$k$
نرمال	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} & x > a \\ 0 & x \leq a \end{cases}$	$a, \mu, \sigma$
لاگ-نرمال	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma e^x} e^{-\frac{(\ln(x-a)-\mu)^2}{2\sigma^2}} & x > a \\ 0 & x \leq a \end{cases}$	$a, \mu, \sigma$
توانی	$f(x) = ax^{-k}$	$a, k$
نمایی منفی	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-\mu)} & x > \mu \\ 0 & x \leq \mu \end{cases}$	$\lambda, \mu$

شکستگی با اتصال چندگانه به وسیله مرزهای مدل مورد نظر قطع می‌شود و یا می‌تواند دارای قطعات بن‌بست در انتهای آن و کاملاً در داخل محدوده مدل باشد. هر چند شکستگی‌های بن‌بست (رنگ سبز) و منفرد (رنگ قرمز) می‌توانند تأثیر مهمی در مقاومت و خواص مکانیکی توده‌سنگ‌ها داشته باشند، اما تأثیر قابل‌توجهی در ویژگی‌های هیدرولیکی مدل ندارند [۳۸]. با توجه به این‌که هدف از ساخت DFN سه‌بعدی در این مطالعه، انجام تحلیل‌های هیدرولیکی است، لذا بهتر است، شکستگی‌های منفرد و بن‌بست از دامنه مدل حذف شوند. این امر کارایی و سرعت حل مسأله را به طور چشمگیری افزایش خواهد داد، به ویژه اگر مدل تعداد زیادی از شکستگی‌ها را در بر داشته باشد.

## ۲-۲- روش مش‌بندی

به منظور مش‌بندی باکیفیت بالا برای یک مدل DFN، همواره باید چالش‌های جدی را مورد نظر قرار داد. از طرفی مش‌بندی ساختاریافته (مش‌بندی که المان‌های آن دارای اشکال منظم هندسی هستند) برای نمایش هندسه پیچیده یک محیط شکسته چندان مناسب نیست و از طرف دیگر یک مش‌بندی ساختار نیافته با کیفیت بالا باید الزامات هندسی ویژه‌ای را برآورده سازد [۳۹]. به عنوان مثال، همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، شبکه شکستگی‌هایی که به صورت آماری تولید می‌شوند، می‌توانند شامل شکستگی‌هایی با اندازه مختلف از بسیار کوچک تا بسیار بزرگ باشند. بدیهی است، برای اینکه جریان در شکستگی‌های کوچک بتواند تعیین شود، این شکستگی‌ها باید با المان‌های مش‌بندی کوچکی مجزاسازی شوند. از طرف دیگر، برای جلوگیری از افزایش هزینه محاسبات، المان‌های مش‌بندی نباید بیش از حد کوچک باشند، هر چند، آنها نباید بیش از حد بزرگ باشند که باعث کاهش دقت مسأله شوند. علاوه بر موارد فوق باید توجه داشت که به دلیل ساختار پیچیده مدل‌های DFN سه‌بعدی با شکل و موقعیت فضایی دلخواه برای تک‌شکستگی‌ها، امکان تشکیل خط اثر دو شکستگی که بر روی سطح شکستگی سوم موازی هستند و یا یکدیگر را قطع می‌کنند، وجود دارد. در حالت اول اگر فاصله بین شکستگی‌ها بیش از اندازه کم باشد و یا در حالت دوم اگر زاویه بین خطوط تقاطع بیش از اندازه کوچک باشد،



شکل ۳: پارامترهای هندسی سطوح شکستگی‌ها

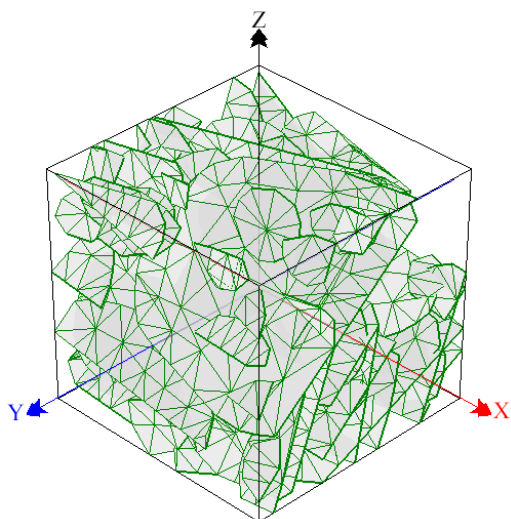
تابع توزیع طول شکستگی‌ها ( $L$ ) معمولاً توانی یا لاگ-نرمال است. شکل شکستگی‌ها، یک پارامتر فرضی است که معمولاً با یکی از اشکال دایره‌ای، بیضوی یا چندضلعی شبیه‌سازی می‌شود. پارامترهای هیدرولیکی شکستگی‌ها مانند بازشدگی نیز شبیه پارامترهای طول و جهت‌یابی به مراکز شکستگی‌ها نسبت داده می‌شود. توزیع بازشدگی معمولاً از تابع یکنواخت تبعیت می‌کند [۳۶]. علاوه بر موارد فوق، برای تعیین ارتباط بین بازشدگی و طول شکستگی‌ها روابط متعددی پیشنهاد شده است که رابطه (۴) یکی از موارد پرکاربرد آن را بیان می‌کند [۳۷].

$$a = \omega\sqrt{L} \quad (4)$$

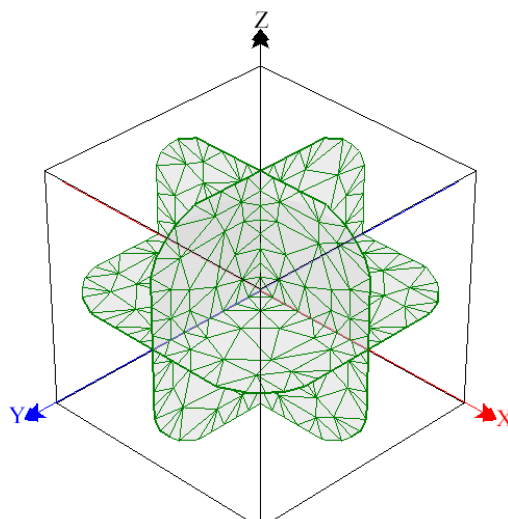
که در آن،  $a$  بازشدگی و  $\omega$  پارامتر ثابتی است که با توجه به شرایط شکستگی‌ها تعیین می‌شود و در حالت کلی برابر 0.004 منظور می‌شود. پس از پایان فرآیند تولید شکستگی‌ها، محدوده مدل از آن استخراج می‌شود. شکل ۱ تصویری از شبکه شکستگی‌های مجزا را نشان می‌دهد.

شکستگی‌ها می‌توانند یکی از سه نوع اصلی اتصال‌پذیری را با شکستگی‌های دیگر یا با مرزهای مدل داشته باشند: اتصال چندگانه (امتدادیافتگی)، بدون اتصال (شکستگی منفرد) و تنها یک اتصال (شکستگی بن‌بست). همان‌طور که شکل ۲-ب نشان می‌دهد، شکستگی‌های با اتصال چندگانه (رنگ آبی) معمولاً دارای اندازه بزرگ‌تری هستند و حداقل دو تقاطع با شکستگی‌های دیگر دارند. یک

مش‌بندی DFN های پیچیده باشد. این الگوریتم یک مثلث‌بندی دلانی-پایه بهینه را ارائه می‌کند که از طرفی، ساختار هندسی DFN و الگوی اتصال‌پذیری شکستگی‌ها را تغییر نمی‌دهد و از طرف دیگر دقیق، سریع و از نظر محاسباتی کم‌هزینه است. شکل ۴ تصویری از مثلث‌بندی سه شکستگی متعامد و شکستگی‌های شبکه‌ی DFN تولید شده را با استفاده از این الگوریتم، نشان می‌دهد.



(ب) تصویری از مش‌بندی شبکه‌ای از شکستگی‌های سه‌بعدی.



(الف) تصویری از مش‌بندی سه شکستگی متعامد.

شکل ۴: ساختارهای مش‌بندی تولید شده در پژوهش حاضر

که در آن،  $q_f$  نرخ جریان متوسط شکستگی  $[m^2/s]$ ،  $K_f$  تانسور نفوذپذیری شکستگی  $[m^3]$ ،  $\nabla p$  گرادیان فشار؛  $\rho_f$  چگالی سیال  $[Kg/m^3]$ ؛  $g$  شتاب ثقل  $[m/s^2]$  و  $h$ ، هد هیدرولیکی  $[m]$  است.

هر شرایط مرزی استاندارد می‌تواند به این سیستم معادلات اعمال شود. این شرایط مرزی، هم می‌تواند از نوع دریکله<sup>۲۵</sup> و هم از نوع نویمان<sup>۲۶</sup> باشد. اگر فرض شود که  $\Gamma_D$  و  $\Gamma_N$  به ترتیب، قسمتی از مرز مدل سه‌بعدی با شرایط مرزی دریکله و نویمان باشد، شرایط مرزی به صورت رابطه (۸) نوشته می‌شود.

$$\begin{cases} h = h_D & \text{on } \Gamma_D \\ q = q_N & \text{on } \Gamma_N \end{cases} \quad (8)$$

که در آن،  $h_D$  و  $q_N$  شرایط مرزی هد هیدرولیکی و نرخ جریان هستند.

برای هر شکستگی درون شبکه، ماتریس نفوذپذیری  $K_f \in \mathbb{R}^{N_{dof} \times N_v} \times \mathbb{R}^{N_{dof} \times N_v}$  با توجه به تعداد درجات آزادی شکستگی ( $N_{dof}$ ) و تعداد رئوس مثلث‌بندی هر شکستگی ( $N_v$ ) ساخته می‌شود. سپس بردارهای ستونی

المان‌هایی با کیفیت پایین تشکیل خواهند شد که در نهایت می‌تواند موجب تشکیل ماتریس مجزاسازی با شرایط نامناسب<sup>۲۰</sup> و ناپایداری در روش عددی محاسبات جریان شود.

در این مطالعه از الگوریتم جدید پیشنهاد شده توسط ارهل<sup>۲۱</sup> و همکارانش [۱۳] استفاده شده است که می‌تواند به خوبی پاسخگوی چالش‌های مذکور در ارتباط با

## ۲-۳- رویه<sup>۲۲</sup> حل جریان

جریان بر روی هر شکستگی در شبکه، متناسب با یک بازشدگی اولیه ( $a_0$ ) تعیین شده و فرض می‌شود که این بازشدگی بسیار کوچک‌تر از طول شکستگی باشد. در این مطالعه از یک تابع توزیع یکنواخت برای تعیین  $a_0$  استفاده شده است. بر اساس قانون پویزول<sup>۲۳</sup>، نفوذپذیری یک شکستگی ( $k_f$ ) مطابق رابطه (۵) توصیف می‌شود [۴۰].

$$k_f = \frac{a_0^3}{12} \quad (5)$$

معادلات کلاسیک که جریان در محیط سنگی شکسته را کنترل می‌کنند، معادلات دارسی<sup>۲۴</sup> و بقای جرم هستند، این معادلات به ترتیب مطابق رابطه‌های (۶) و (۷) معرفی می‌شوند [۴۱].

$$\begin{cases} q_f = -\frac{1}{\mu} K_f \cdot \nabla p \\ \nabla q_f = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\nabla p = \rho_f \cdot g \cdot \nabla h \quad (7)$$

$x_m \in K_m$  و  $b - Ax_m \perp L_m$ . حال اگر روند یافتن  $x_m$  با شروع از بردار اولیه  $x_0$  باشد، آنگاه جواب تقریبی  $x_m$  در زیرفضای  $x_0 + K_m$  جستجو می‌شود به طوری که  $b - Ax_m \perp L_m$  [۴۲].

دنباله  $\{x, Ax, \dots, A^{n-1}x\}$  یک دنباله کرلیف و زیرفضای  $K_m(A, x) = \text{span}\{x, Ax, \dots, A^{m-1}x\}$  زیرفضای بُعد  $m$  نامیده می‌شود. یک مسأله بزرگ-مقیاس معمولاً بر روی زیرفضای بُعد  $m$  ( $m \ll n$ ) تصویر می‌شود و سپس مسأله تصویر شده با روش‌های مختلف حل می‌شود. برای حل دستگاه معادلات  $Ax = b$  زیرفضای کرلیف  $K_m(A, r_0) = \text{span}\{r_0, Ar_0, \dots, A^{m-1}r_0\}$  که در آن، بردار باقیمانده  $r_0 = b - Ax_0$  برای انجام تکرارهایی که تنها ضرب ماتریس-بردار را لازم دارند، مورد استفاده قرار می‌گیرد و در آن، بُعد زیرفضا در هر مرحله، یک مرتبه افزایش پیدا می‌کند. دو روش پایه شناخته شده از زیرفضای کرلیف، با عناوین روش‌های آرنولدی<sup>۲۹</sup> و لنگزوس<sup>۳۰</sup> معرفی شده‌اند. اگر ماتریس مجزاسازی  $A$  متقارن باشد و بردار اولیه یکسان باشد، عملاً این دو روش با یکدیگر معادل خواهند شد. تعمیم‌هایی از روش لنگزوس برای ماتریس‌های متقارن نامعین و دستگاه‌های معادلات خطی غیرمتقارن نیز وجود دارد که همه این روش‌ها با بردار اولیه  $x_0$  و بردار باقیمانده  $r_0$  آغاز شده و در  $m$  امین مرحله  $x_m$  را به شکل  $x_0 + K_m(A, r_0)$  و با فراهم آوردن شرایط کمینه‌سازی خطا یا از بین بردن باقیمانده، به دست می‌دهد [۴۲].

یک انتخاب برای  $L_m$  به صورت  $L_m = AK_m$  است که روش‌های تکراری متعامدسازی کامل<sup>۳۱</sup> (FOM) و متعامدسازی ناقص<sup>۳۲</sup> (IOM) از آن توسعه یافته‌اند.

روش آرنولد، روش متعامدسازی تصویر بر روی  $K_m$  برای ماتریس‌های غیرهرمیتی<sup>۳۳</sup> (ماتریس هرمیتی ماتریسی است مربعی که ترانهاده مزدوج مختلط آن با خودش برابر باشد) معمولی است. با داشتن ماتریس  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، یک بردار غیر صفر  $v$ ، یک عدد صحیح  $m \leq n$  و یک مجموعه از  $m+1$  بردار متعامد  $\{v_1, \dots, v_{m+1}\}$  می‌توان یک ماتریس هایزنبرگ<sup>۳۴</sup>  $(m+1) \times m$  (تقریباً مثلثی)  $\tilde{H}_m$  را به صورت زیر ایجاد نمود که در آن  $V_{m+1} = (v_1, \dots, v_{m+1})$  و  $V_m = (v_1, \dots, v_m)$  [۳۵].

$$AV_m = V_{m+1}\tilde{H}_m \quad (۱۰)$$

به عنوان بردار جریان و  $h_f \in \mathbb{R}^{N_{dof} \times N}$  به عنوان مقادیر نقطه‌ای هد هیدرولیکی تشکیل می‌شوند. با استفاده از ماتریس‌های انتقال برای یک مدل DFN از رابطه (۹) می‌توان نتیجه گرفت

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N1} & \dots & \dots & K_{NN} \end{bmatrix}$$

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix} \quad (۹)$$

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{pmatrix}$$

که در آن،  $\dot{N} = N_{v_t} \times N_{dof_t}$  است و  $N_{v_t}$  و  $N_{dof_t}$  به ترتیب تعداد کل رئوس مدل و تعداد کل درجات آزادی مدل سه‌بعدی است. مقدار هد هیدرولیکی باید در هر رأس از المان‌های مش‌بندی تعیین شود. تعداد کل معادلات دستگاه برابر با کل تعداد رئوس مدل خواهد بود که با شرط تعادل جریان و از طریق رویه FEM به دست می‌آید.

## ۲-۴- روش‌های تکراری زیر فضای کرلیف

مفهوم روش‌های تکراری زیرفضای کرلیف توسط ریاضی‌دان و مهندس علوم دریایی الکسی کرلیف<sup>۲۷</sup> در سال ۱۹۳۱ مطرح شد. در روش‌های تکراری مدرن برای یافتن یک یا تعدادی از مقادیر ویژه از ماتریس‌های تنک و بزرگ یا حل دستگاه‌های بزرگ معادلات خطی هدف آن است که برخلاف روش‌های غیرتکراری، از عملگرهای ماتریسی (مثل ضرب و تقسیم دو ماتریس یا معکوس‌گیری از ماتریس‌ها) اجتناب شود و به جای آن ضرب بردار در ماتریس و کار با بردارهای حاصله در فرآیندهای تکراری ترجیح داده شود. روش‌های زیرفضای کرلیف نمونه‌ای از روش‌های تصویرسازی<sup>۲۸</sup> و یکی از مهم‌ترین روش‌های تکراری برای حل دستگاه‌های خطی تنک و بزرگ است. دستگاه معادلات خطی  $Ax = b$  که در آن  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  و  $x, b \in \mathbb{R}^n$  برای حل مسأله جریان در توده‌سنگ در نظر گرفته می‌شود. فرض شود که  $K_m$  و  $L_m$  زیرفضاهای  $m$  بُعدی از  $\mathbb{R}^n$  باشد. یک روش تصویری‌سازی روی زیرفضای  $K_m$  و عمود بر زیرفضای  $L_m$  عبارت است از به دست آوردن یک جواب تقریبی  $x_m$  برای دستگاه فوق با شرط اینکه



BiCGStab<sup>۴۳</sup>MI(k)BiCGStab الگوریتمی مشابه با روش BiCG دارند با این تفاوت که زیر الگوریتم‌های تسریع کننده همگرایی و پایدارسازی آن به الگوریتم اصلی اضافه شده‌اند و در مسائلی با شرایط خاص می‌توانند سرعت رسیدن به پاسخ مدل را افزایش دهند [۴۳، ۴۴]. همچنین، روش TFQMR<sup>۴۴</sup> بر پایه روش QMR توسعه یافته است که دارای زیر الگوریتم تسریع کننده همگرایی در شرایط خاص است [۴۵]. شرح جزئیات روش‌های مختلف زیرفضای کرلیف خارج از هدف این پژوهش است و برای مطالعه بیشتر در این ارتباط می‌توان به منبع [۴۲] مراجعه نمود.

### ۳- اعتبارسنجی

برای اعتبارسنجی محاسبات مربوط به تعیین میدان جریان با استفاده از روش‌های زیرفضای کرلیف در این پژوهش، یک مدل عددی ساده در نظر گرفته شده است. در این مدل جریان سیال گذرنده از یک شبکه شکستگی با سه شکستگی صفحه‌ای- دایره‌ای متعامد، محاسبه می‌شود. چارچوب هندسی شکستگی‌ها و شرایط مرزی مدل در شکل ۵- الف نشان داده شده است. شعاع و بازشدگی هر شکستگی به ترتیب ۳ متر و ۱ میلی‌متر و مرکز آنها در مبدأ مختصات واقع شده است. مدل شامل یک بلوک با ابعاد ۵×۵×۵ مترمکعب با مرکز واقع در مبدأ مختصات است. یک هد هیدرولیکی ۲۰ متری بر وجه سمت راست مدل (در جهت مثبت محور X) اعمال شده و هد هیدرولیکی در بقیه مرزها صفر است. چگالی ماده سنگ و سختی عمودی سطوح شکستگی‌ها به ترتیب ۲۵۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب و ۱/۳۲ گیگاپاسکال بر متر است. بازشدگی شکستگی‌ها یک میلی‌متر در نظر گرفته شده و چگالی و گرانیوی سیال به ترتیب برابر ۱۰۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب و ۰/۰۰۱ پاسکال ثانیه است.

برای اعتبارسنجی روش‌های زیرفضای کرلیف شامل: FOM, IOM, CG, CR, GCR, PCGCR, GMRES, QGMRES, Lanczos, BiCG, MI(k)CGStab, GpBiCG و TFQMR، نتایج محاسبه جریان برای هر کدام از این روش‌ها با روش مستقیم فاکتورگیری LQ و همچنین با نتایج مدل‌سازی در نرم‌افزار 3DEC مورد مقایسه قرار گرفته و در جدول ۲ نشان داده شده است.

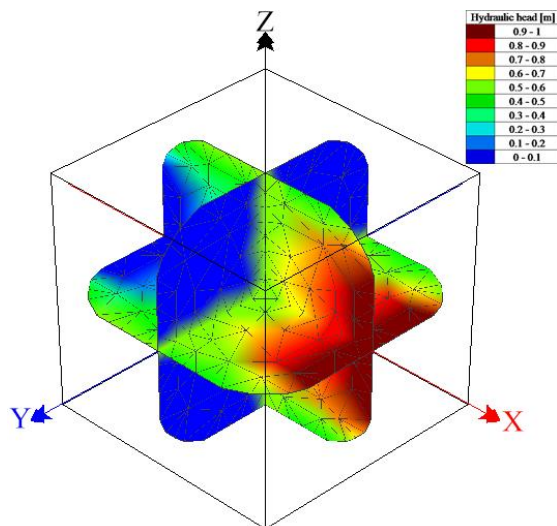
یکی از پرکاربردترین روش‌هایی که از پایه آرنولدی استفاده می‌کنند، روش حداقل باقیمانده تعمیم‌یافته<sup>۳۵</sup> (GMRES) است. برای حل دستگاه معادلات  $Ax = b$  بردار  $x$  در فضای  $K_m + x_0$  به صورت  $x = x_0 + V_m y$  در آن،  $y$  یک بردار با اندازه  $m$  است. روش QGMRES<sup>۳۶</sup> الگوریتمی مشابه با GMRES دارد با این تفاوت که به محض رسیدن به شرایط نسبی همگرایی، فرآیند تکرارها متوقف می‌شود.

در مواردی که ماتریس  $A$  متقارن باشد، الگوریتم پایه آرنولدی با لنکزوس متقارن جایگزین می‌شود و ماتریس هایزنبرگ  $\tilde{H}_m$  به یک ماتریس سه قطری متقارن تقلیل می‌یابد. روش‌های گرادیان مزدوج<sup>۳۷</sup> (CG) و باقیمانده مزدوج<sup>۳۸</sup> (CR) کاربردهای عمومی از پایه لنکزوس متقارن و روش GCR تلفیقی از دو روش مذکور است. برای شرایطی که ویژگی کمینه‌سازی الگوریتم CG تضمین نمی‌شود، مثلاً به دلیل عدم مثبت معین بودن ماتریس  $A$  (ماتریس مثبت معین ماتریس هرمیتی است که تمام مقادیر ویژه آن مثبت باشد)، دو روش معروف دیگر، روش حداقل باقیمانده<sup>۳۹</sup> (MINRES) و روش LQ متقارن (SYMMLQ) توسعه یافته‌اند. اجرای روش MINRES به فاکتورگیری QR از ماتریس سه قطری وابسته است در حالی که در روش SYMMLQ از فاکتورگیری LQ از ماتریس سه قطری استفاده می‌شود [۳۵]. الگوریتم‌های لنکزوس غیرمتقارن بر اساس انتقال ماتریس  $A$  به یک ماتریس سه قطری غیرمتقارن به جای یک ماتریس هایزنبرگ استوار هستند. در به دست آوردن یک ماتریس سه قطری، شرط تعامد بردارهای  $v_i$  از بین می‌رود. در عوض، دو مجموعه از بردارهای متعامد  $V_m = (v_1 \dots v_m)$  و  $W_m = (w_1 \dots w_m)$  طوری محاسبه می‌شوند که [۳۵].

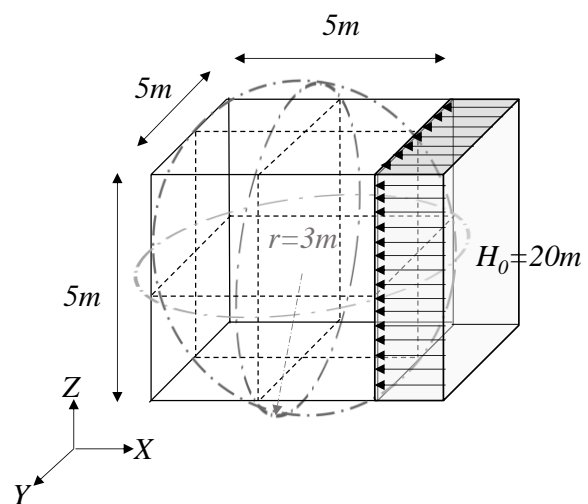
$$W_m^T W_m = V_m^T V_m = 1 \quad (11)$$

$$W_m^T A V_m = T_m \quad (12)$$

که در آن،  $T_m$  یک ماتریس سه قطری نامتقارن است. روش گرادیان دوزوجی<sup>۴۰</sup> (BiCG) و روش شبه-حداقل باقیمانده<sup>۴۱</sup> (QMR) مثال‌هایی از الگوریتم لنکزوس غیرمتقارن هستند. برای هر تکرار از BiCG و QMR یک ضرب داخلی ماتریس در بردار نیاز است که وجود  $A^T$  و الزامی است. روش‌های  $^{۴۲}$ GpBiCG و



(ب) نمودار سه‌بعدی هد هیدرولیکی.



(الف) شرایط مرزی و ساختار هندسی مدل.

شکل ۵: پیکربندی مدل مورد استفاده برای اعتبارسنجی

جدول ۲: نتایج محاسبه جریان مدل با استفاده از روش‌های مختلف زیرفضای کرپل و روش مستقیم فاکتورگیری LQ

جریان ( $m^3/s$ )	روش	جریان ( $m^3/s$ )	روش
$2.4 \times 10^{-2}$	LANCZOS	$2.34 \times 10^{-2}$	3DEC
$2.4 \times 10^{-2}$	GMRES	$2.4 \times 10^{-2}$	LQ فاکتورگیری
$2.4 \times 10^{-2}$	QGMRES	$2.4 \times 10^{-2}$	FOM
$2.4 \times 10^{-2}$	GPBiCG	$2.4 \times 10^{-2}$	IOM
$2.4 \times 10^{-2}$	BiCG	$2.4 \times 10^{-2}$	CG
واگرا	MI(k)BiCGStab	$2.4 \times 10^{-2}$	CR
واگرا	TFQMR	$2.4 \times 10^{-2}$	GCR
		واگرا	PCGCR

شده برای انجام مدل‌سازی‌های عددی استفاده شده است. این کد قادر است ساختار هندسی مدل را به صورت منظم یا DFN تولید کند، آن را مش‌بندی نموده، جریان سیال را با استفاده از رویه FEM حل کند و در نهایت نمودارهای سه‌بعدی مختلف را به صورت گرافیکی ترسیم نماید؛ بنابراین، نتایج مدل‌سازی جریان سیال با استفاده از روش مستقیم LQ و روش‌های زیرفضای کرپل در این بخش با استفاده از کد FlowSHUT<sup>3D</sup> ارائه شده است.

نتایج بیانگر آن است که به جز روش‌های PCGCR، MI(k)BiCGStab و TFQMR که از همگرایی به پاسخ مدل ناتوان هستند، بقیه روش‌ها جریان عبوری از مدل را دقیقاً برابر با روش مستقیم فاکتورگیری LQ و معادل  $2.4 \times 10^{-2} m^3/s$  محاسبه می‌کنند. همچنین نتایج

3DEC یک نرم‌افزار تجاری است که بنیان آن فرمولاسیون عددی در یک فضای سه‌بعدی است و به طور گسترده در نگارش دو‌بعدی آن یعنی UDEC اعتبارسنجی شده است و قادر به شبیه‌سازی جریان سیال در یک محیط ناپیوسته (مانند توده‌سنگ) است؛ بنابراین، چنین مدل‌سازی می‌تواند به عنوان تلفیقی از بلوک‌های مجزا و ناپیوستگی‌هایی در نظر گرفته شود که مرزهای بلوک‌ها را تشکیل می‌دهند. برای مدل‌سازی جریان سیال در 3DEC، لازم است که هر بلوک به طور مستقل برای استفاده از روش تفاضل محدود<sup>۴۵</sup> (FDM) المان‌بندی شود؛ بنابراین رویه حل جریان سیال در آن به یک روش ترکیبی FDM-DEM مبدل می‌شود [۴۶].

در این پژوهش از کد نرم‌افزاری FlowSHUT<sup>3D</sup> که توسط نویسندگان این پژوهش در محیط C# توسعه داده

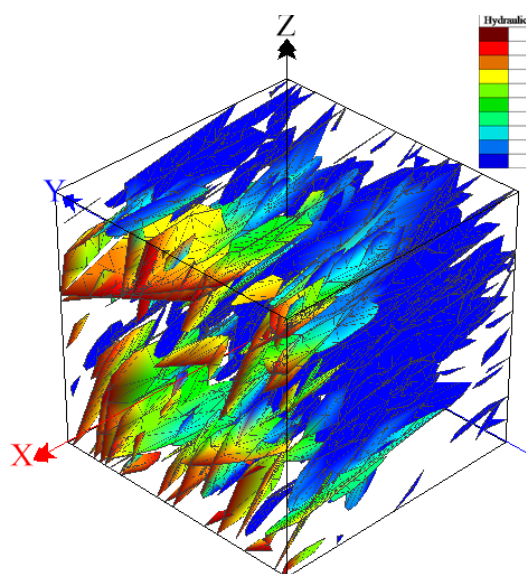
مذکور قرابت زیادی با پاسخ مدل‌سازی 3DEC از خود نشان می‌دهند.

#### ۴- تحلیل حساسیت

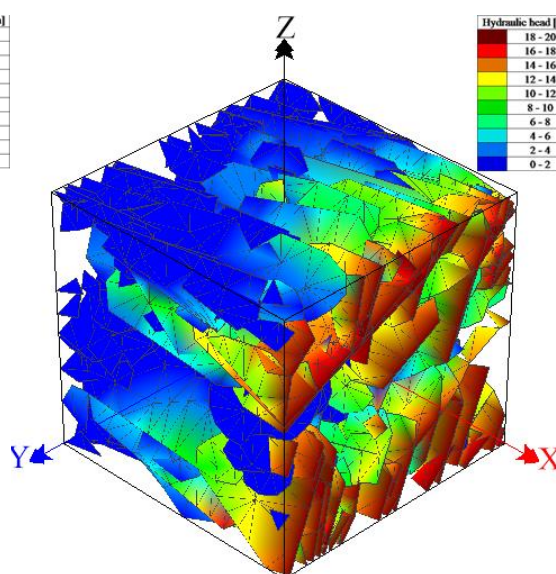
به منظور تعیین دقت و سرعت روش‌های حل عددی زیرفضای کریلف، در این بخش به تحلیل حساسیت این پارامترها و اثر آنها بر محاسبه جریان سیال در مدل شبکه شکستگی‌های مجزا پرداخته می‌شود. این مدل هندسی با استفاده از داده‌های هندسی-آماري جدول ۳ تولید شده است. REV مدل یک مکعب با ابعاد  $10 \times 10 \times 10$  متر است.

جدول ۳: پارامترهای هندسی-آماري دسته‌درزه‌ها برای تولید مدل DFN

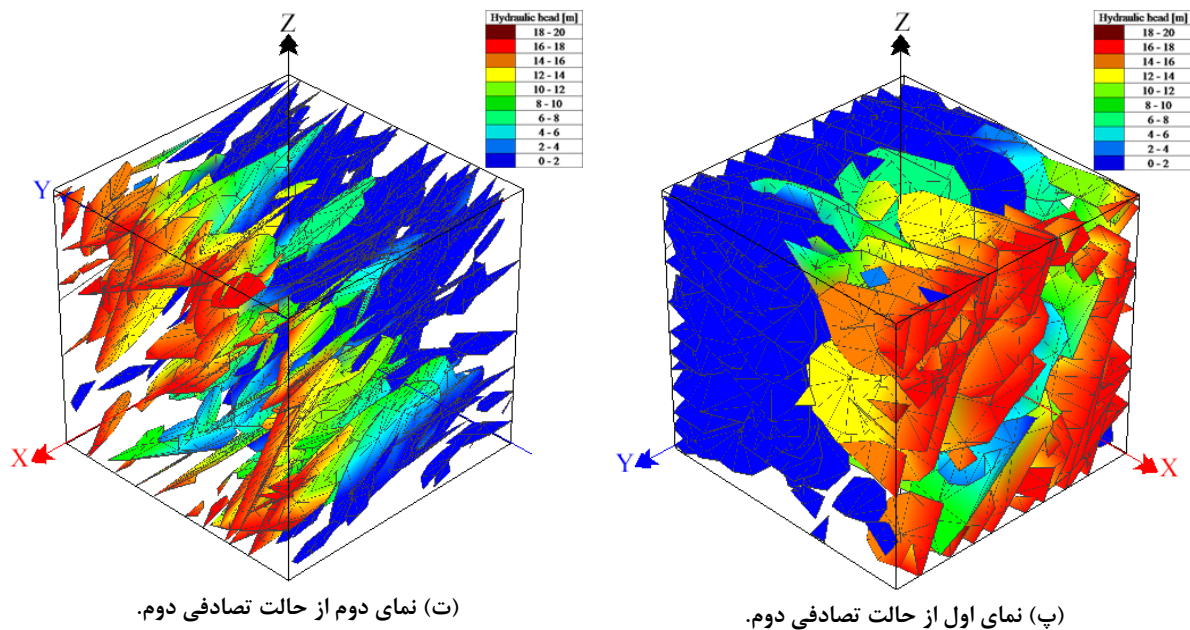
دسته‌درزه	شیب [Deg]	جهت شیب [Deg]		چگالی [ $1/m^3$ ]	طول [m]		بازشدگی [mm]	
	یکنواخت	فیشر	میانگین	پواسن	توانی	بیشینه	کمینه	بیشینه
	میانگین	k	میانگین	میانگین	$\alpha$	کمینه	بیشینه	کمینه
1	70	40	45	0.2	1.78	1	10	4
2	30	20	135	0.12	1.78	1	10	4
3	80	40	135	0.1	1.78	1	10	4
4	45	20	315	0.15	1.78	1	10	4



(ب) نمای دوم از حالت تصادفی اول.



(الف) نمای اول از حالت تصادفی اول.



شکل ۶: نمودار هد هیدرولیکی در مدل شبکه شکستگی‌های مجزای سه‌بعدی در دو نمای مختلف

DFN سه‌بعدی است. نتایج خطای محاسبه جریان در روش‌های مختلف زیرفضای کرلیف برای حالت تصادفی اول و دوم برای ۵۰۰ تکرار از هر روش به ترتیب در جدول‌های ۶ و ۷ فهرست شده است.

همان‌طور که جداول ۴ و ۵ نشان می‌دهند، تمام روش‌های زیرفضای کرلیف به جز دو روش BiCG و GPBiCG، نتایج تقریباً نزدیکی حول مقادیر میانگین ۳۵/۸۵ و ۱۱/۶۴ مترمکعب بر ثانیه را به ترتیب برای حالات تصادفی اول و دوم ارائه می‌کنند. دو روش مذکور مقادیر دورتری را از میانگین مقادیر نشان می‌دهند. با توجه به جدول‌های ۶ و ۷ و این اصل که هر چه میزان خطای محاسبات کمتر باشد، همگرایی دقیق‌تری حاصل می‌شود، بنابراین دو روش BiCG و GPBiCG با داشتن بیشترین میزان خطا برای هر دو حالت تصادفی اول و دوم، برای انجام محاسبات جریان سیال در مدل‌های DFN مناسب به نظر نمی‌رسند.

تحلیل حساسیت نشان داده است که برای هر دو حالت تصادفی، سه روش PCGCR، MI(k)BiCGStab، و TFQMR که در مرحله اعتبارسنجی نیز قادر به همگرایی به پاسخ مدل نبودند، نتایج مشابهی را در ارتباط با مدل DFN نشان می‌دهند و قادر به همگرایی به پاسخ مدل نیستند. مقدار جریان محاسبه شده از طریق روش‌های زیرفضای کرلیفی که به پاسخ مدل همگرا هستند برای دو حالت تصادفی مختلف در جدول‌های ۴ و ۵ به کمک مدلسازی‌های عددی FlowSHUT<sup>3D</sup> ارائه شده است.

در این پژوهش تعیین میزان دقت روش‌های زیرفضای کرلیف با استفاده از میزان خطای محاسباتی ( $\bar{e}$ ) مطابق با رابطه (۱۳) محاسبه می‌شود.

$$\bar{e} = \|q^{i-1} - q^i\|_2 \quad (13)$$

که در آن،  $q^{i-1}$  و  $q^i$  به ترتیب بردارهای جریان محاسبه شده در آخرین تکرار و تکرار قبلی از آن هستند.  $\bar{e}$  به خوبی نشان‌دهنده نحوه همگرایی و دقت محاسبات روش‌های زیرفضای کرلیف در محاسبه جریان در مدل‌های

جدول ۴: جریان محاسبه شده برای حالت تصادفی اول از مدل شبکه شکستگی‌های مجزا از طریق روش‌های مختلف زیرفضای کرلیف

جریان ( $m^3/s$ )	روش	جریان ( $m^3/s$ )	روش
35.04	GMRES	35.03	FOM
35.45	QGMRES	35.44	IOM
46.85	GPBiCG	35.78	CG
47.19	BiCG	35.75	CR
37	LANCZOS	35.10	GCR

جدول ۵: جریان محاسبه شده برای حالت تصادفی دوم از مدل شبکه شکستگی‌های مجزا از طریق روش‌های مختلف زیرفضای کرلیف

روش	جریان ( $m^3/s$ )	روش	جریان ( $m^3/s$ )
FOM	11.35	GMRES	11.38
IOM	11.5	QGMRES	11.5
CG	11.62	GPBiCG	15.19
CR	11.6	BiCG	15.32
GCR	11.4	LANCZOS	12.01

جدول ۶: خطای محاسباتی روش‌های مختلف زیرفضای کرلیف برای حالت تصادفی اول از شبکه شکستگی‌های مجزا

روش	$\bar{e}$	روش	$\bar{e}$
FOM	1.12E-01	GMRES	1.12E-01
IOM	1.13E-01	QGMRES	1.12E-01
CG	1.18E-01	GPBiCG	1.24E-01
CR	1.13E-01	BiCG	1.25E-01
GCR	1.12E-01	LANCZOS	1.13E-01

جدول ۷: خطای محاسباتی روش‌های مختلف زیرفضای کرلیف برای حالت تصادفی دوم از شبکه شکستگی‌های مجزا

روش	$\bar{e}$	روش	$\bar{e}$
FOM	1.65E-01	GMRES	1.63E-01
IOM	1.67E-01	QGMRES	1.64E-01
CG	1.74E-01	GPBiCG	1.83E-01
CR	1.66E-01	BiCG	1.83E-01
GCR	1.64E-01	LANCZOS	1.66E-01

تصادفی از شبکه شکستگی‌ها، ارائه شده است. لازم به ذکر است که زمان محاسبه شده در جدول‌های ۸ و ۹ زمان حل دستگاه معادلات حاصله از روش FEM و پس از تشکیل ماتریس مجزاسازی است. تمامی روش‌های زیرفضای کرلیف در این تحلیل با تعداد ثابت ۵۰۰ تکرار به پاسخ مدل همگرا شده‌اند و گزارش‌های جدول‌های ۸ و ۹ بیانگر زمان پردازش محاسبات برای این تعداد تکرار برای هر روش است.

همان طور که در جدول‌های ۸ و ۹ نشان داده شده است، روش‌های CG، CR و IOM به ترتیب کمترین زمان پردازش محاسبات تعیین میدان جریان را در هر دو حالت تصادفی اول و دوم به خود اختصاص داده‌اند. با توجه به آنچه در بخش‌های قبلی مورد بحث قرار گرفت، روش‌های CG، CR و IOM از دقت بالایی در محاسبه جریان در DFN نیز برخوردارند؛ بنابراین می‌توان این روش‌ها را به عنوان بهترین روش‌های محاسبه جریان در محیط DFN در نظر گرفت.

تحلیل دوم به مقایسه زمان پردازش محاسبات مربوط به حل معادلات جریان در مدل DFN با استفاده از روش‌های مختلف زیرفضای کرلیف اختصاص دارد. زمان پردازش نقش مهمی را در تحلیل‌های مربوط به جریان سیال در مدل‌های سه‌بعدی DFN ایفا می‌کند. هنگامی که شبکه‌ای با تعداد زیادی از شکستگی‌ها مورد نظر باشد، استفاده از روش‌هایی که محاسبات جریان را در کوتاه‌ترین زمان ممکن انجام دهد، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این پژوهش از یک کامپیوتر با سخت‌افزار یکسان برای تمامی تحلیل‌ها استفاده شده است. با توجه به اینکه بار محاسباتی یک تکرار<sup>۴۷</sup> منفرد از هر یک از روش‌های زیرفضای کرلیف می‌تواند با روش دیگر آن بسیار متفاوت باشد، زمان کار پردازشگر کامپیوتر برای محاسبه پاسخ مدل (میدان جریان) با استفاده از روش‌های مختلف زیرفضای کرلیف می‌تواند معیار مناسبی برای تعیین کارایی نسبی این روش‌ها و تعیین بهترین آنها باشد. در جدول‌های ۸ و ۹ زمان پردازش محاسبات برای تعیین پاسخ مدل با استفاده از روش‌های مختلف زیرفضای کرلیف برای دو حالت

جدول ۸: زمان پردازش روش‌های مختلف زیرفضای کرلیف برای حالت تصادفی اول از شبکه شکستگی‌های مجزا

روش	زمان (میلی ثانیه)	روش	زمان (میلی ثانیه)
FOM	197800	GMRES	961372
IOM	110217	QGMRES	961370
CG	86059	GPBiCG	105164
CR	86711	BiCG	108862
GCR	859470	LANCZOS	878944

جدول ۹: زمان پردازش روش‌های مختلف زیرفضای کرلیف برای حالت تصادفی دوم از شبکه شکستگی‌های مجزا

روش	زمان (میلی ثانیه)	روش	زمان (میلی ثانیه)
FOM	113020	GMRES	549300
IOM	62900	QGMRES	549450
CG	49170	GPBiCG	60043
CR	49549	BiCG	62200
GCR	491125	LANCZOS	502253

#### ۵- نتیجه‌گیری

محاسبه جریان سیال در محیط‌های سنگی درزه‌دار از اهمیت ویژه‌ای در علوم مختلف مهندسی برخوردار است. در این پژوهش، عملکرد روش‌های مختلف زیرفضای کرلیف به عنوان سریع‌ترین روش‌های حل دستگاه‌های معادلات تنک و بزرگ حاصل از اجرای روش مجزاسازی عددی المان محدود مورد بررسی قرار گرفته است. ابتدا به توصیف چارچوب هندسی مدل، یعنی شبکه شکستگی‌های مجزای سه‌بعدی پرداخته شد و پس از آن، روش مش‌بندی متناسب با این ساختار هندسی مورد بحث قرار گرفت. رویه حل جریان بر اساس روش المان محدود به تفصیل شرح داده شده و محاسبه دستگاه معادلات حاصل از این روش عددی در مرحله اعتبارسنجی با استفاده از روش‌های مختلف زیرفضای کرلیف مورد بررسی قرار گرفته است. برای ارزیابی عملکرد روش‌های مختلف زیرفضای کرلیف، یک تحلیل حساسیت بر روی پارامترهای دقت و زمان پردازش این روش‌ها انجام شد و در نهایت دقیق‌ترین و سریع‌ترین روش‌های محاسبه جریان سیال در شبکه شکستگی‌های مجزای سه‌بعدی تعیین شده است. با توجه به تحلیل‌های انجام شده روش‌های CR، CG، IOM جزو سریع‌ترین و دقیق‌ترین روش‌های زیرفضای کرلیف انتخاب شده‌اند. با

اگر چه، برخی از پژوهشگران بر تحلیل اثر پارامترهای آماری- هندسی تولید شبکه شکستگی‌های مجزا بر جریان سیال متمرکز شده و بیان نموده‌اند که این پارامترها می‌توانند احتمالاً کمیت‌های فیزیکی مختلف مورد مطالعه در شبکه شکستگی‌های مجزا را تحت تأثیر قرار دهند [۴۷]. بر اساس تحلیل‌های انجام شده بر روی دو حالت تصادفی مختلف در این پژوهش، چنین استنباط می‌شود که پیکربندی هندسی شبکه شکستگی‌های مجزا و تغییرپذیری پارامترهای آماری- هندسی تولید آن، احتمالاً اثر قابل‌توجهی بر کارایی روش‌های زیرفضای کرلیف ندارد. این نتیجه با استناد به این موضوع که پس از مجزاسازی ساختار هندسی شبکه توسط الگوریتم مش‌بندی، رویه FEM با آرایشی از رئوس به هم مرتبط (به جای هندسه اولیه مدل) سروکار دارد، می‌تواند مورد بحث قرار گیرد؛ بنابراین، تغییر جهت‌یابی و موقعیت فضایی شکستگی‌ها الزاماً باعث تغییر نحوه‌ی ارتباط رئوس مدل و پیکربندی ماتریس مجزاسازی نمی‌شود. هر چند، با توجه به پیچیدگی موضوع، تحلیل‌های حساسیت بیشتری در این زمینه موردنیاز است که هدف این پژوهش نیست و در مرحله بعدی از پژوهش، نویسندگان به آن پرداخته خواهد شد.

[9] Yu, Q, Tanaka, M, and Ohnishi, Y (1999), 'An inverse method for the model of water flow in discrete fracture network', Proceedings of the 34th Janan National Conference on Geotechnical Engineering, Tokyo, 1303-4.

[10] Cacas, Marie-Christine, et al. (1990), 'Modeling fracture flow with a stochastic discrete fracture network: calibration and validation: 1. The flow model', Water Resources Research, 26 (3), 479-89.

[11] de Dreuzy, Jean-Raynald, et al. (2004), 'Influence of spatial correlation of fracture centers on the permeability of two-dimensional fracture networks following a power law length distribution', Water resources research, 40 (1).

[12] Dreuzy, J-R, Méheust, Yves, and Pichot, Géraldine (2012), 'Influence of fracture scale heterogeneity on the flow properties of three-dimensional discrete fracture networks (DFN)', Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 117 (B11).

[13] Erhel, Jocelyne, De Dreuzy, Jean-Raynald, and Poirriez, Baptiste (2009), 'Flow simulation in three-dimensional discrete fracture networks', SIAM Journal on Scientific Computing, 31 (4), 2688-705.

[14] Mustapha, Hussein and Mustapha, Kassem (2007), 'A new approach to simulating flow in discrete fracture networks with an optimized mesh', SIAM Journal on Scientific Computing, 29 (4), 1439-59.

[15] Pichot, Géraldine, Erhel, Jocelyne, and de Dreuzy, J-R (2012), 'A generalized mixed hybrid mortar method for solving flow in stochastic discrete fracture networks', SIAM Journal on scientific computing, 34 (1), B86-B105.

[16] Painter, S and Cvetkovic, Vladimir (2005), 'Upscaling discrete fracture network simulations: An alternative to continuum transport models', Water Resources Research, 41 (2).

[17] Botros, Farag E, et al. (2008), 'On mapping fracture networks onto continuum', Water resources research, 44 (8).

[18] Jackson, C Peter, Hoch, Andrew R, and Todman, Steve (2000), 'Self-consistency of a heterogeneous continuum porous medium representation of a fractured medium', Water Resources Research, 36 (1), 189-202.

[19] Karimi-Fard, Mohammad, Gong, Bin, and Durlofsky, Luis J (2006), 'Generation of coarse-scale continuum flow models from detailed fracture characterizations', Water resources research, 42 (10).

توجه به تحلیل‌های حساسیت انجام گرفته در این پژوهش، ارزیابی می‌شود که جهت‌یابی و موقعیت فضایی شکستگی‌ها احتمالاً اثر قابل‌توجهی بر کارایی روش‌های زیرفضای کرلیف ندارد، هرچند، درک دقیق اثر پارامترهای آماری-هندسی تولید شبکه شکستگی‌های مجزا نیاز به تحلیل‌های حساسیت گسترده‌تری دارد که در ادامه مسیر پژوهش نویسندگان قرار دارد.

## مراجع

[1] Butscher, Christoph, Einstein, Herbert H, and Huggenberger, Peter (2011), 'Effects of tunneling on groundwater flow and swelling of clay-sulfate rocks', Water Resources Research, 47 (11).

[2] Gellasch, Christopher A, et al. (2013), 'Characterization of fracture connectivity in a siliciclastic bedrock aquifer near a public supply well (Wisconsin, USA)', Hydrogeology Journal, 21 (2), 383-99.

[3] Hyman, Jeffrey D, et al. (2014), 'Conforming Delaunay triangulation of stochastically generated three dimensional discrete fracture networks: a feature rejection algorithm for meshing strategy', SIAM Journal on Scientific Computing, 36 (4), A1871-A94.

[4] Karra, Satish, et al. (2015), 'Effect of advective flow in fractures and matrix diffusion on natural gas production', Water Resources Research, 51 (10), 8646-57.

[5] Xu, Chaoshui and Dowd, Peter (2010), 'A new computer code for discrete fracture network modelling', Computers & Geosciences, 36 (3), 292-301.

[6] Jing, L, Tsang, C-F, and Stephansson, O (1995), 'DECOVALEX—an international co-operative research project on mathematical models of coupled THM processes for safety analysis of radioactive waste repositories', International journal of rock mechanics and mining sciences & geomechanics abstracts (32: Elsevier), 389-98.

[7] Berkowitz, Brian (2002), 'Characterizing flow and transport in fractured geological media: A review', Advances in water resources, 25 (8), 861-84.

[8] Zimmerman, RW and Bodvarsson, GS (1996), 'Effective transmissivity of two-dimensional fracture networks', International journal of rock mechanics and mining sciences & geomechanics abstracts (33: Elsevier), 433-38.



- [31] Jing, Lanru, Ma, Yue, and Fang, Zulie (2001), 'Modeling of fluid flow and solid deformation for fractured rocks with discontinuous deformation analysis (DDA) method', *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 38 (3), 343-55.
- [32] Min, Ki-Bok, et al. (2004), 'Stress-dependent permeability of fractured rock masses: a numerical study', *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 41 (7), 1191-210.
- [33] Latham, John-Paul, et al. (2013), 'Modelling stress-dependent permeability in fractured rock including effects of propagating and bending fractures', *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 57, 100-12.
- [34] Lei, Qinghua, et al. (2017), 'Polyaxial stress-dependent permeability of a three-dimensional fractured rock layer', *Hydrogeology Journal*, 1-12.
- [35] Parashar, Rishi and Reeves, Donald M (2012), 'On iterative techniques for computing flow in large two-dimensional discrete fracture networks', *Journal of computational and applied mathematics*, 236 (18), 4712-24.
- [36] Meyers, Anthony Tony G and Priest, Stephen D (2000), 'Generating discontinuity orientation data for use in probabilistic models for modelling excavations in rock', *ISRM International Symposium (International Society for Rock Mechanics)*.
- [37] Vermilye, Jan M and Scholz, Christopher H (1995), 'Relation between vein length and aperture', *Journal of structural geology*, 17 (3), 423-34.
- [38] Jing, Lanru (2003), 'A review of techniques, advances and outstanding issues in numerical modelling for rock mechanics and rock engineering', *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 40 (3), 283-353.
- [39] Monteagudo, JEP and Firoozabadi, Abbas (2004), 'Control-volume method for numerical simulation of two-phase immiscible flow in two-and three-dimensional discrete-fractured media', *Water resources research*, 40 (7).
- [40] Baca, RG, Arnett, RC, and Langford, DW (1984), 'Modelling fluid flow in fractured-porous rock masses by finite-element techniques', *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 4 (4), 337-48.
- [41] Koudina, N, et al. (1998), 'Permeability of three-dimensional fracture networks', *Physical Review E*, 57 (4), 4466.
- [42] Saad, Yousef (2003), *Iterative methods for sparse linear systems (SIAM)*.
- [20] Priest, Stephen Donald (2012), *Discontinuity analysis for rock engineering (Springer Science & Business Media)*.
- [21] Follin, Sven, et al. (2014), 'A methodology to constrain the parameters of a hydrogeological discrete fracture network model for sparsely fractured crystalline rock, exemplified by data from the proposed high-level nuclear waste repository site at Forsmark, Sweden', *Hydrogeology Journal*, 22 (2), 313-31.
- [22] Beyabanaki, S Amir Reza, et al. (2009), 'A coupling model of 3-D discontinuous deformation analysis (3-D DDA) and finite element method', *AJSE*, 34 (2B), 107-19.
- [23] Goodman, Richard E, Taylor, Robert L, and Brekke, Tor L (1968), 'A model for the mechanics of jointed rocks', *Journal of Soil Mechanics & Foundations Div*.
- [24] Noorishad, J, Ayatollahi, MS, and Witherspoon, PA (1982), 'A finite-element method for coupled stress and fluid flow analysis in fractured rock masses', *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts (19: Elsevier)*, 185-93.
- [25] Elsworth, D (1986), 'A hybrid boundary element-finite element analysis procedure for fluid flow simulation in fractured rock masses', *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 10 (6), 569-84.
- [26] Carpenter, Chris (2015), 'A Practical Simulation Method Capturing Complex Hydraulic-Fracturing Physics', *Journal of Petroleum Technology*, 67 (10), 81-83.
- [27] Minkoff, Susan E, et al. (2003), 'Coupled fluid flow and geomechanical deformation modeling', *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 38 (1), 37-56.
- [28] Noorishad, J, Tsang, Chin-Fu, and Witherspoon, PA (1992), 'Theoretical and field studies of coupled hydromechanical behaviour of fractured rocks—1. Development and verification of a numerical simulator', *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts (29: Elsevier)*, 401-09.
- [29] Rutqvist, J, et al. (1992), 'Theoretical and field studies of coupled hydromechanical behaviour of fractured rocks—2. Field experiment and modelling', *International journal of rock mechanics and mining sciences & geomechanics abstracts (29: Elsevier)*, 411-19.
- [30] Zhao, Zhihong, et al. (2013), 'Impact of stress on solute transport in a fracture network: a comparison study', *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, 5 (2), 110-23.



- 
- <sup>1</sup> Representative Elementary Volume
  - <sup>2</sup> Discrete Fracture Network
  - <sup>3</sup> Equivalent Continuum models
  - <sup>4</sup> Hybrid model
  - <sup>5</sup> Hydraulic conductivity
  - <sup>6</sup> Finite Element Method
  - <sup>7</sup> Goodman
  - <sup>8</sup> Biot
  - <sup>9</sup> Elsworth
  - <sup>10</sup> Boundary Element Method
  - <sup>11</sup> Discrete Element Method
  - <sup>12</sup> Discontinuous Deformation analysis
  - <sup>13</sup> Hybrid Methods
  - <sup>14</sup> Sparse
  - <sup>15</sup> Hydraulic Head
  - <sup>16</sup> Parashar
  - <sup>17</sup> Reeves
  - <sup>18</sup> Krylov
  - <sup>19</sup> Hemispherical projection
  - <sup>20</sup> Ill-Conditioned matrices
  - <sup>21</sup> Erhel
  - <sup>22</sup> Scheme
  - <sup>23</sup> Poiseuille
  - <sup>24</sup> Darcy
  - <sup>25</sup> Dirichlet
  - <sup>26</sup> Neumann
  - <sup>27</sup> Alexei Krylov
  - <sup>28</sup> Projection
  - <sup>29</sup> Arnoldi
  - <sup>30</sup> lanczos
  - <sup>31</sup> Full orthogonalization method
  - <sup>32</sup> Incomplete orthogonalization method
  - <sup>33</sup> Non-Hermitian
  - <sup>34</sup> Heisenberg
  - <sup>35</sup> Generalized minimal residual method
  - <sup>36</sup> Quasi-GMRES
  - <sup>37</sup> Conjugate gradient method
  - <sup>38</sup> Conjugate residual method
  - <sup>39</sup> Minimal residual method
  - <sup>40</sup> Bi-Conjugate gradient method
  - <sup>41</sup> Quasi- minimal residual method
  - <sup>42</sup> Generalized product BiCG
  - <sup>43</sup> Multiple-Lanczos BiCG stabilized
  - <sup>44</sup> The transpose-free QMR
  - <sup>45</sup> Finite difference method
  - <sup>46</sup> Realization
  - <sup>47</sup> Iteration

[43] Abe, Kuniyoshi and Sleijpen, Gerard LG (2013), 'Solving linear equations with a stabilized GPBiCG method', *Applied Numerical Mathematics*, 67, 4-16.

[44] Yeung, Man-Chung and Chan, Tony F (1999), 'ML (k) BiCGSTAB: A BiCGSTAB variant based on multiple Lanczos starting vectors', *SIAM Journal on Scientific Computing*, 21 (4), 1263-90.

[45] Qing-bo, Li, Ping, Zhou, and Hui-ling, Sun (2010), 'Application of the TFQMR method to the analysis of PEC target scattering problem in a lossy half space', *Electrical and Control Engineering (ICECE), 2010 International Conference on (IEEE)*, 3385-88.

[46] Itasca (2004), 3DEC user's guide, version 4.0: Itasca Consulting Group Inc.

[47] Baghbanan, Alireza and Jing, Lanru (2008), 'Stress effects on permeability in a fractured rock mass with correlated fracture length and aperture', *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 45 (8), 1320-34.