

## تأثیر پارامترهای الاستیک لایه‌ها بر نحوه‌ی گسترش شکست هیدرولیکی با استفاده از روش ناپیوستگی - جابجایی

محمود بهنیا<sup>۱</sup>، کامران گشتاسبی<sup>۲\*</sup>، محمد فاتحی مرچی<sup>۳</sup>، علی‌اکبر گلشنی<sup>۴</sup>

۱- دانش آموخته دکتری، بخش مهندسی معدن، دانشگاه تربیت مدرس

۲- دانشیار بخش مهندسی معدن، دانشگاه تربیت مدرس

۳- دانشیار دانشکده مهندسی معدن و متالورژی، دانشگاه یزد

۴- استادیار بخش مهندسی عمران و محیط‌زیست، دانشگاه تربیت مدرس

(دریافت دی ۹۰، پذیرش اردیبهشت ۹۱)

### چکیده

شکست هیدرولیکی به عنوان روشی برای تحریک مخازن نفتی به عوامل مختلفی از جمله خصوصیات محیطی که شکستگی در آن رشد می‌کند بستگی دارد. خصوصیات مکانیکی لایه‌ها به عنوان یکی از مهم‌ترین پارامترهای تأثیرگذار بر روند پیشروی شکست هیدرولیکی و هندسه‌ی آن شناخته می‌شوند. در این تحقیق با تغییر پارامترهای مقاومتی محیط دربرگیرنده‌ی شکست هیدرولیکی، فرآیند گسترش شکست هیدرولیکی در محیط‌های چند لایه (محیط نرم و سخت) و تحت تأثیر پارامترهای الاستیک، مورد ارزیابی قرار گرفته است. بدین منظور روش المان مرزی بر اساس فرمول‌بندی ناپیوستگی - جابجایی برای حل گسترش شکست هیدرولیکی در سازندهای لایه‌ای مورد استفاده قرار گرفت. از المان‌های مرتبه‌ی بالا برای مدلسازی مرز ترک و محیط به همراه المان نوک ترک برای افزایش دقت این روش عددی ارائه شده در محیط‌های ناهمگن (2DFPM) استفاده شده است. صحت روش عددی ارائه شده در مدلسازی مواد ناهمگن، به وسیله‌ی تعدادی مسئله‌ی دارای حل تحلیلی تأیید گردید. در این مطالعه تنش‌های کششی ایجاد شده در امتداد فصل مشترک به همراه فاکتور شدت تنش موجود در نوک ترک برای بررسی رفتار گسترش شکست هیدرولیکی در شرایط مختلف محاسبه گردیدند. نتایج نشان می‌دهد که بسته به وضعیت قرارگیری شکست هیدرولیکی نسبت به فصل مشترک (عمود، گذرنده و موازی) و همچنین پارامترهای محیط در برگیرنده‌ی شکستگی، میزان فاکتور شدت تنش ایجاد شده در نوک ترک و تنش‌های کششی در امتداد فصل مشترک متفاوت خواهند بود، که این دو پارامتر امکان گسترش شکستگی و یا احتمال توقف آن را تعیین می‌نمایند. همچنین میزان بازشدگی شکست هیدرولیکی به خصوصیات الاستیک لایه‌ها وابسته بوده و تغییر خصوصیات الاستیک لایه‌ها می‌تواند هندسه شکستگی را تحت تأثیر قرار دهد.

### کلمات کلیدی

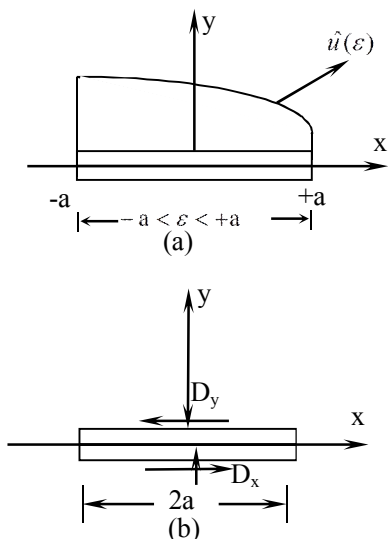
شکست هیدرولیکی، محیط‌های لایه‌ای، گسترش شکستگی، روش ناپیوستگی - جابجایی

## ۱- مقدمه

المان نوک ترک به منظور بررسی گسترش شکست هیدرولیکی در توده‌سنگ‌های ناهمگن مورد استفاده قرار گرفته است (2DFPM). شکستگی هیدرولیکی در سه حالت عمود بر فصل مشترک بین دو لایه، گذرنده از آن و همچنین موازی با آن مورد مطالعه قرار گرفته است. فاکتور شدت تنش در نوک ترک هیدرولیکی و همچنین تنش‌های کششی ایجاد شده در امتداد فصل مشترک برای ارزیابی روند گسترش شکست هیدرولیکی در چنین حالت‌هایی محاسبه گردیدند. میزان بازشدگی شکست هیدرولیکی در محیط‌های مختلف و توانایی آن برای انتقال سیال دیگر پارامتر مورد مطالعه بوده است. لازم به ذکر است که کلیه مدل‌سازی‌ها در حالت دو بعدی، کرنش صفحه‌ای و با فرض الاستیسیته‌ی خطی صورت پذیرفته است.

## ۲- روش ناپیوستگی - جابجایی (DDM) مرتبه‌ی بالا

یک المان ناپیوستگی - جابجایی با طول  $2a$  که در امتداد محور  $x$  قرار دارد در شکل ۱(a) نشان داده شده است و در آن توزیع کلی ناپیوستگی - جابجایی  $u(\varepsilon)$  مشخص شده است.



شکل ۱: (a) المان ناپیوستگی - جابجایی به همراه توزیع  $u(\varepsilon)$ .  
(b) المان ثابت<sup>۴</sup> در روش ناپیوستگی - جابجایی

با در نظر گرفتن اجزاء  $u_x$  و  $u_y$  برای ناپیوستگی - جابجایی کلی  $u(\varepsilon)$  و فرض ثابت بودن آن‌ها و همچنین برابری آن‌ها با مقادیر  $D_x$  و  $D_y$  در بازه‌ی  $(-a, +a)$  که در شکل ۱(b) نشان داده شده است، دو سطح المان ناپیوستگی - جابجایی می‌توانند در امتداد محور  $y$  به دو بخش مثبت  $(y=0_+)$  و بخش منفی  $(y=0_-)$  تقسیم شوند. تغییر شکل، یک تغییر ثابت را در

شکست هیدرولیکی یکی از روش‌های تحریک مخزن است که برای افزایش بهره‌برداری نفت و گاز از مخازن با نفوذپذیری کم مورد استفاده قرار می‌گیرد [۱]. یکی از جنبه‌های مهم در طراحی این روش، تخمین هندسه‌ی شکستگی با توجه به محیط دربرگیرنده‌ی آن است. به دلیل وجود لایه‌بندی در مخازن نفتی، گسترش شکست هیدرولیکی در چنین محیط‌هایی از نحوه‌ی قرار گرفتن نسبت به این عوارض ساختاری تأثیر می‌پذیرد؛ همچنین تغییر خصوصیات الاستیک لایه‌ها در دو طرف لایه‌بندی بر نحوه‌ی گسترش شکست هیدرولیکی به ویژه میزان بازشدگی آن و در نهایت بر جای گیری پروپانت<sup>۱</sup> و قدرت انتقال سیال در شکستگی اثر می‌گذارد. برای بررسی تأثیر لایه‌بندی بر نحوه‌ی گسترش ترک، مطالعات عددی مختلفی با تکیه بر اصول مکانیک شکست و آنالیز تنش صورت گرفت است. مهم‌ترین این مطالعات و همچنین خلاصه‌ای از مطالعات صورت گرفته در گذشته را می‌توان در منابع [۲] و [۳] یافت.

در میان روش‌های عددی، در حل مسائلی که در آن‌ها نسبت سطح به حجم کوچک است و تنش به سرعت تغییر می‌کند روش المان مرزی<sup>۲</sup> کارآمدتر است. بنابراین این روش قدرتمند عددی به طور گسترده در مکانیک شکست مورد استفاده قرار گرفته است [۴] [۵]. در این روش به دلیل کاهش یک بعد مسئله و عدم نیاز به المان بندی سطح - تنها با المان بندی مرزها و سطح ترک - میزان داده‌ها و زمان محاسبات نسبت به روش المان محدود<sup>۳</sup> به شدت کاهش می‌یابد. روش ناپیوستگی - جابجایی (DDM)<sup>۴</sup> که یک روش المان مرزی غیرمستقیم<sup>۵</sup> است برای مدل‌سازی مسائل گسترش ترک در مکانیک شکست سنگ مورد استفاده قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است که در روش ناپیوستگی - جابجایی مشکلات مربوط به مش بندی مجدد مسئله‌ی وجود ندارد.

اخیراً روش ناپیوستگی - جابجایی با المان مرتبه‌ی بالا<sup>۶</sup> به همراه المان نوک ترک برای حل مسائل مربوط به گسترش ترک مورد استفاده قرار گرفته است [۶] [۷] [۸] [۹] [۱۰] [۱۱]. در المان‌های مرتبه‌ی بالا با برهم گذاری نقاط مرکزی زیرالمان‌ها<sup>۷</sup> (هر المان مرتبه‌ی بالا می‌تواند به دو، سه و یا چهار زیر المان تقسیم شود)، دقت محاسبات افزایش می‌یابد. همچنین مشکل یکتایی<sup>۸</sup> در نوک ترک نیز با استفاده از المان نوک ترک برطرف می‌شود.

در این مطالعه روش المان مرزی مرتبه‌ی بالا به همراه

$g(x,y)$  به صورت زیر ارائه شده است [۱۲].

$$\begin{aligned} u_x &= [2(1-\nu)f_{,y} - \gamma f_{,xx}] + [-(1-2\nu)g_{,x} - \gamma g_{,yy}] \\ u_y &= [(1-2\nu)f_{,x} - \gamma f_{,xy}] + [2(1-\nu)g_{,y} - \gamma g_{,xy}] \end{aligned} \quad (۴)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\mu [2f_{,xy} + \gamma f_{,xy}] + 2\mu [g_{,yy} + \gamma g_{,yy}] \\ \sigma_{yy} &= 2\mu [-\gamma f_{,xy}] + 2\mu [g_{,yy} - \gamma g_{,yy}] \\ \sigma_{xy} &= 2\mu [2f_{,xy} + \gamma f_{,xy}] + 2\mu [-\gamma g_{,xy}] \end{aligned} \quad (۵)$$

در روابط ارائه شده،  $\mu$  مدول برش و  $f_x, g_x, f_y, g_y$  و بقیه‌ی توابع، مشتقات جزئی توابع سازگار  $f(x,y)$  و  $g(x,y)$  نسبت به  $x$  و  $y$  می‌باشند که این توابع پتانسیل برای یک المان کوادراتیک می‌تواند به شکل زیر محاسبه گردد.

$$f(x,y) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \sum_{j=1}^3 D_x^j F_j(I_0, I_1, I_2), \quad (۶)$$

$$g(x,y) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \sum_{j=1}^3 D_y^j F_j(I_0, I_1, I_2)$$

که تابع  $F_j$  به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$F_j(I_0, I_1, I_2) = \int N_j(\varepsilon) \ln[(x-\varepsilon)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}} d\varepsilon, \quad (۷)$$

$j=1, \text{ to } 3$

و انتگرال‌های  $I_0, I_1$  و  $I_2$  به صورت زیر تعریف می‌گردند.

$$I_0(x,y) = \int_{-a}^a \ln[(x-\varepsilon)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}} d\varepsilon = y(\theta_1 - \theta_2) - (x-a) \ln(r_1) + (x+a) \ln(r_2) - 2a \quad (۱-۸)$$

$$I_1(x,y) = \int_{-a}^a \varepsilon \ln[(x-\varepsilon)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}} d\varepsilon = xy(\theta_1 - \theta_2) + 0.5(y^2 - x^2 + a^2) \ln \frac{r_1}{r_2} - ax \quad (۲-۸)$$

$$I_2(x,y) = \int_{-a}^a \varepsilon^2 \ln[(x-\varepsilon)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}} d\varepsilon = \frac{y}{3}(3x^2 - y^2)(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{3}(3xy^2 - x^3 + a^3) \ln(r_1) - \frac{1}{3}(3xy^2 - x^3 - a^3) \ln(r_2) - \frac{2a}{3}(x^2 - y^2 + \frac{a^2}{3}) \quad (۳-۸)$$

عبارات  $\theta_1, \theta_2, I_1$  و  $I_2$  در این معادلات به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{y}{x-a}\right), \quad \theta_2 = \arctan\left(\frac{y}{x+a}\right),$$

$$r_1 = [(x-a)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}, \text{ and } r_2 = [(x+a)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}$$

زمان عبور از یک طرف سطح به طرف دیگر تحمل می‌کند. بنابراین مقادیر ثابت تغییر شکل  $D_x$  و  $D_y$  می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$D_x = u_x(x,0_-) - u_x(x,0_+), \quad D_y = u_y(x,0_-) - u_y(x,0_+) \quad (۱)$$

قرارداد علامت مثبت  $D_x$  و  $D_y$  در شکل (b) نشان داده شده است [۱۲].

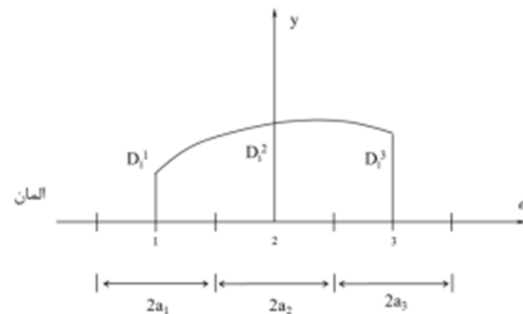
## ۱-۲- فرمول بندی المان کوادراتیک<sup>۱</sup>

محاسبات المان کوادراتیک در روش ناپیوستگی - جابجایی بر اساس انتگرال گیری تحلیلی از توابع شکل<sup>۱۱</sup>، که با برهم نهی کوادراتیک بر روی المان‌های خطی ناپیوستگی - جابجایی همراه می‌باشند صورت می‌پذیرد ([۷]). شکل ۲، توزیع ناپیوستگی - جابجایی کوادراتیک را نشان می‌دهد که می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$D_i(\varepsilon) = N_1(\varepsilon)D_i^1 + N_2(\varepsilon)D_i^2 + N_3(\varepsilon)D_i^3, \quad i = x, y \quad (۲)$$

که در آن  $D_i^1$  و  $D_i^2$  و  $D_i^3$  گره‌های کوادراتیک در یک المان ناپیوستگی - جابجایی می‌باشند.

$$\begin{aligned} N_1(\varepsilon) &= \varepsilon(\varepsilon - 2a_1)/8a_1^2, \\ N_2(\varepsilon) &= -(\varepsilon^2 - 4a_1^2)/4a_1^2, \\ N_3(\varepsilon) &= \varepsilon(\varepsilon + 2a_1)/8a_1^2 \end{aligned} \quad (۳)$$



شکل ۲: برهم نهی کوادراتیک برای یک المان ناپیوستگی - جابجایی مرتبه‌ی بالا

توابع شکل دارای برهم نهی کوادراتیک هستند که در آن‌ها  $a_1 = a_2 = a_3$  است. یک المان کوادراتیک دارای سه گره است که هر کدام در مرکز سه زیر المان قرار گرفته‌اند. میزان تنش‌ها و تغییر شکل‌های ناشی از جابجایی افقی و عمودی یک المان ثابت ناپیوستگی - جابجایی، در یک محیط بی‌نهایت در امتداد محور  $x$  بر حسب توابع سازگار<sup>۱۲</sup>  $f(x,y)$  و

### ۳- محیط ناهمگن<sup>۱۳</sup>

برای بررسی و مدلسازی یک محیط ناهمگن فرض می‌شود که محیط مورد مطالعه شامل دو زیرمجموعه‌ی محدود است همانند آنچه در شکل ۳ نشان داده شده است. دو زیرمجموعه‌ی مورد نظر که با عناوین  $R_1$  و  $R_2$  مشخص شده‌اند، هر کدام به تنهایی همگن، همسانگرد و الاستیک خطی با ثوابت الاستیک  $E_1$  و  $\nu_1$  و  $E_2$  و  $\nu_2$  فرض شده‌اند. خطوط مرزی  $C_1$  برای زیر ناحیه‌ی  $R_1$  و  $C_2$  برای  $R_2$  در جهت عقربه‌های ساعت برای مدل کردن یک محیط محدود پیمایش می‌گردند؛ و سیستم مختصات محلی  $s-n$  متناسب با هر مرز در شکل ۳ نشان داده شده است. قسمت‌های مشترک دو مرز  $C_1$  و  $C_2$ ، فصل مشترک بین دو زیر ناحیه را مشخص می‌نمایند. مختصات محلی  $n_1, s_1$  و  $n_2, s_2$  در جهت مخالف هم ( $n_1 = -n_2$  و  $s_1 = -s_2$ ) و در امتداد فصل مشترک قرار گرفته‌اند.

یک مسئله‌ی مقدار مرزی<sup>۱۴</sup> برای یک جسم ناهمگن (شکل ۳) به وسیله‌ی تعریف شرایط مرزی تغییر شکل و تنش در امتداد قسمت‌های آزاد<sup>۱۵</sup> مرزهای جسم ( $C_1$  و  $C_2$ ) و اعمال شرایط سازگاری<sup>۱۶</sup> برای تغییر شکل‌ها و نیروها در امتداد فصل مشترک صورت می‌پذیرد. شرایط سازگاری برای تغییر شکل‌ها و تنش‌ها در نقطه‌ی  $Q$  که بر روی فصل مشترک قرار دارد به ترتیب در روابط ۹ و ۱۰ ارائه شده‌اند.

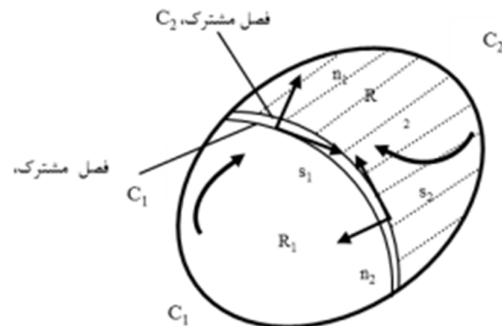
$$\sigma_s^{[1]}(Q) = \sigma_s^{[2]}(Q) \quad (9)$$

$$\sigma_n^{[1]}(Q) = \sigma_n^{[2]}(Q)$$

$$u_s^{[1]}(Q) = -u_s^{[2]}(Q) \quad (10)$$

$$u_n^{[1]}(Q) = -u_n^{[2]}(Q)$$

علامت منفی در رابطه‌ی (۱۰) به علت جهت‌های مخالف مختصات محلی  $n_1, s_1$  و  $n_2, s_2$  در امتداد فصل مشترک است.



شکل ۳: جسم ناهمگن که شامل دو زیرمجموعه همگن، همسانگرد و الاستیک خطی است

حل المان مرزی این مسئله با تقسیم مرزهای  $C_1$  و  $C_2$  به تعدادی سگمنت‌های خطی مستقیم<sup>۱۷</sup> که تغییر شکل‌ها و تنش‌ها بر روی آن‌ها ثابت می‌باشند و پشت سر هم قرار گرفته‌اند امکان‌پذیر است. با در نظر گرفتن بخش‌هایی از مرز که معرف فصل مشترک می‌باشند، تعداد  $N_1$  المان مرزی در امتداد  $C_1$  و  $N_2$  المان مرزی در امتداد  $C_2$  قرار دارند. المان‌های موجود در امتداد فصل مشترک باید کاملاً بر هم منطبق گردند. بنابراین برای هر المان فصل مشترک چهار مجهول وجود خواهد داشت: دو جزء تغییر شکل  $u_s$  و  $u_n$  و دو جزء نیروی<sup>۱۸</sup>  $\sigma_n$  و  $\sigma_s$ . شرایط سازگاری ارائه شده در فرمول‌های ۹ و ۱۰ چهار رابطه‌ی ارائه‌ی می‌کنند که باید برای هر المان برقرار باشند و بنابراین مسئله قابل حل است.

هر کدام از روش‌های المان مرزی همانند ناپیوستگی-جابجایی و تنش‌های موهمی می‌توانند برای حل مسائل مقدار مرزی در محیط‌های ناهمگن مورد استفاده قرار گیرند. در نهایت ماتریس ضرایب تأثیر (C) به همراه معلومات (b) و مجهولات (D) مسئله، معادلات نهایی را شکل می‌دهند.

$$\left\{ \begin{aligned} b_s^i &= \sum_{j=1}^N C_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N C_{sn}^{ij} D_n^j \\ b_n^i &= \sum_{j=1}^N C_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N C_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \right\} \quad i = 1 \text{ to } N \quad (11)$$

### ۴- فاکتور شدت تنش و المان نوک ترک

متناسب با هندسه‌ی مسئله و شکل ترک موجود در آن که تحت بارگذاری قرار دارد، تنش‌ها و تغییر شکل‌های موجود در اطراف نوک ترک در منابع مختلف ([۱۳]، [۱۴]) ارائه شده‌اند. برای محاسبه‌ی فاکتور شدت تنش در روش ناپیوستگی-جابجایی به میزان تغییر شکل‌های عمودی و برشی نیاز است. بر اساس نظریه مکانیک شکست الاستیسیته‌ی خطی (LEFM) مد یک و دو فاکتور شدت تنش ( $K_I$  و  $K_{II}$ ) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود ([۷]):

$$K_I = \frac{\mu}{4(1-\nu)} \left( \frac{2\pi}{a} \right)^{\frac{1}{2}} D_y(a), \quad (12)$$

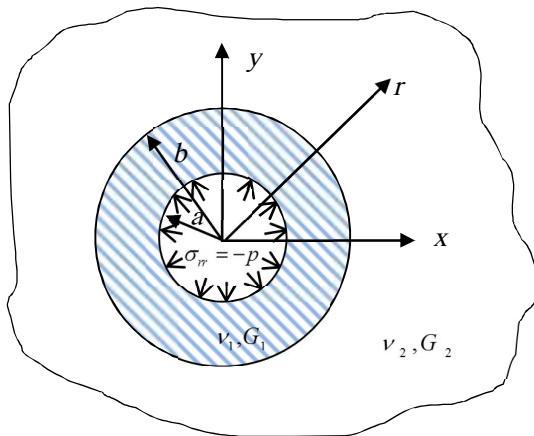
$$K_{II} = \frac{\mu}{4(1-\nu)} \left( \frac{2\pi}{a} \right)^{\frac{1}{2}} D_x(a)$$

حل تحلیلی مسائل مربوط به گسترش ترک نشان می‌دهد که تنش‌های موجود در جلوی نوک ترک که با فاصله‌ی  $r$  نسبت به آن قرار دارند با نسبت  $r^{-0.5}$  تغییر می‌کنند. با توجه به تغییرات یکتایی  $1/\sqrt{r}$  برای تنش‌ها و تغییر شکل‌ها در نزدیکی

ارزیابی دقت این روش در تخمین میزان تنش‌ها در امتداد ناپیوستگی موجود در بین دو محیط، از حل تحلیلی یک ترک تحت کشش و عمود بر فصل مشترک در محیط همگن استفاده شد. دلیل استفاده از این مسائل وجود حل تحلیلی برای آن‌ها و همچنین ارائه‌ی حل عددی توسط دیگر محققین برای این مسائل است. مقایسه‌ی حل عددی صورت گرفته توسط روش ارائه‌شده و حل تحلیلی مسائل نشان داد که روش ارائه‌شده از دقت بالایی برخوردار است.

#### ۵-۱- فضای حلقوی در محیط نامحدود<sup>۱۹</sup>

یک مسئله‌ی ساده از مسائل مقدار مرزی برای یک محیط الاستیک و ناهمگن در شکل ۵ ارائه‌شده است. منطقه‌ی مورد مطالعه شامل یک فضای حلقوی  $a \leq r \leq b$  با ثوابت الاستیک  $\nu_1, G_1$  و  $\nu_2, G_2$  است که در درون یک گمانه‌ی دایره‌ای با شعاع  $r=b$  است که خود در درون یک صفحه‌ی بزرگ با ثوابت الاستیک  $\nu_2, G_2$  قرار دارد. مرز داخلی فضای حلقوی تحت تنش فشاری  $\sigma_{rr} = -p$  است در حالی که صفحه‌ی بزرگ در بی‌نهایت تحت تنش قرار ندارد. برای حل عددی این مسئله از روش DDM با المان مرتبه‌ی بالا استفاده‌شده است که در این مسئله  $a/b=1/2$ ,  $\nu_1=0/25$  و  $G_1/G_2=2$  و  $p/G_1=0/001$  فرض شده‌اند. برای حل این مسئله نیاز است که شرایط سازگاری تنش و تغییر شکل شعاعی بر روی فصل مشترک  $r=b$  اعمال گردد. مقایسه‌ی نتایج روش عددی با نتایج تحلیلی [۱۲] در شکل ۶ نشان داده‌شده است. مقایسه‌ی نتایج نشان می‌دهد که روش عددی با دقت بسیار بالایی قادر به مدل کردن محیط‌های ناهمگن است.

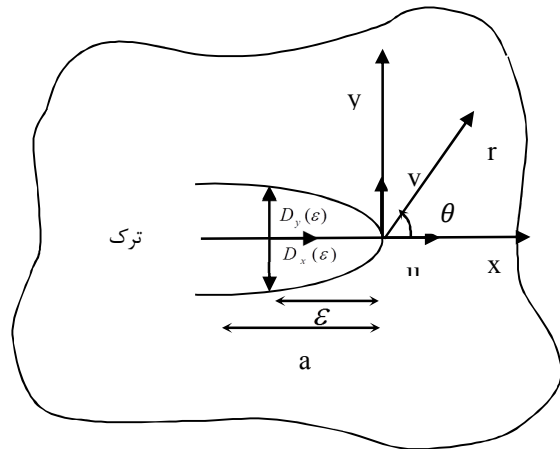


شکل ۵: فضای حلقوی قرار گرفته در درون یک محیط بی‌نهایت

نوک ترک دقت محاسبه‌ی تنش‌ها و تغییر شکل‌ها به وسیله‌ی روش ناپیوستگی - جابجایی کاهش می‌یابد؛ بنابراین نیاز به المان نوک ترک برای افزایش دقت و کارایی روش ارائه‌شده احساس می‌گردد. بنابراین المان نوک ترک ارائه‌شده در منبع [۷] برای رفع یکتایی نوک ترک مورد استفاده قرار گرفت. با استفاده از المان نوک ترک استفاده‌شده برای ترک با طول  $2a$  که در شکل ۴ نشان داده‌شده است، تغییرات سهمی‌گون ناپیوستگی - جابجایی در امتداد این المان به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$D_i(\varepsilon) = D_i(a) \left( \frac{\varepsilon}{a} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad i = x, y \quad (13)$$

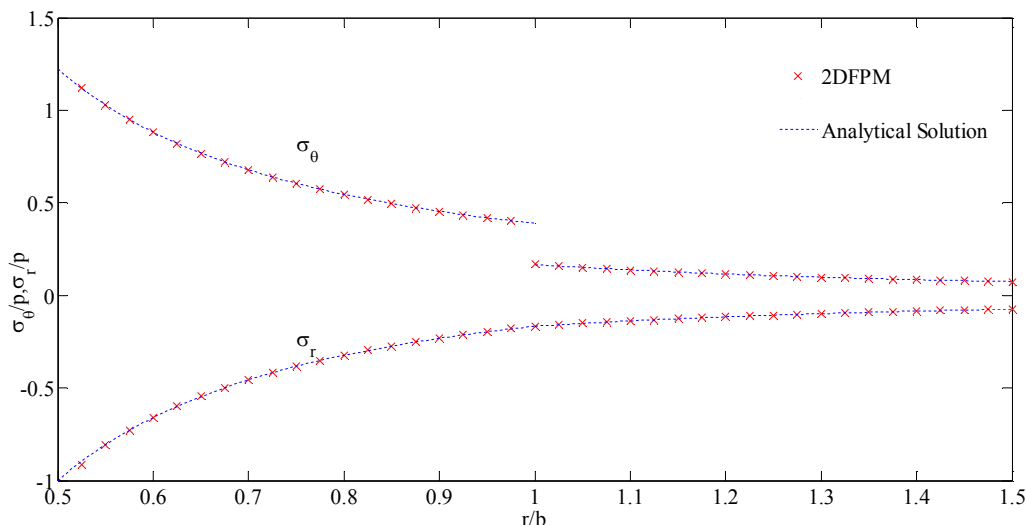
که در این رابطه  $\varepsilon$  فاصله از نوک ترک و  $D_x(a)$  و  $D_y(a)$  میزان بازشدگی نرمال و برشی در مرکز المان نوک ترک می‌باشند. با جایگزین کردن رابطه‌ی ۱۳ در معادلات ۴ و ۵ تنش‌ها و تغییر شکل‌ها بر اساس  $D_i(a)$  قابل محاسبه می‌باشند. توابع پتانسیل  $f_c(x, y)$  و  $g_c(x, y)$  برای المان نوک ترک نیز به صورت زیر محاسبه می‌گردد.



شکل ۴: المان نوک ترک استفاده‌شده در روش عددی ارائه‌شده

#### ۵- اعتبارسنجی روش ناپیوستگی - جابجایی مرتبه‌ی بالا

برای اعتبارسنجی روش ارائه‌شده (2DFPM) از چندین مسئله‌ی ساده که دارای حل تحلیلی نیز می‌باشند استفاده شد. برای اعتبارسنجی در محیط ناهمگن از مدلسازی یک فضای حلقوی در محیط نامحدود استفاده گردید. برای اعتبارسنجی روش ارائه‌شده در محیط محدود یک ترک مرکزی زاویه‌دار در این محیط مدل گردید. و در نهایت برای



شکل ۶: تنش‌های مماسی و شعاعی درون فضای حلقوی ( $0.5 \leq r/b \leq 1.0$ ) و صفحه‌ی بی‌نهایت ( $r/b \geq 1.0$ )

المان کوادراتیک در امتداد ترک در نظر گرفته شده است. همچنین برای جلوگیری از چرخش مدل دو المان ثابت (دارای تغییر شکل صفر) در دو گوشه‌ی انتهایی صفحه در نظر گرفته شده است.

نتایج نشان می‌دهد که مقادیر به دست آمده از مدل‌سازی صورت گرفته با دقت بسیار بالایی با نتایج منتشر شده در مرجع ۱۵ تطابق دارند.

جدول ۱: مقادیر فاکتور تنش طبیعی شده برای ترک زاویه‌دار در صفحه‌ی محدود با نسبت  $h/w=2$

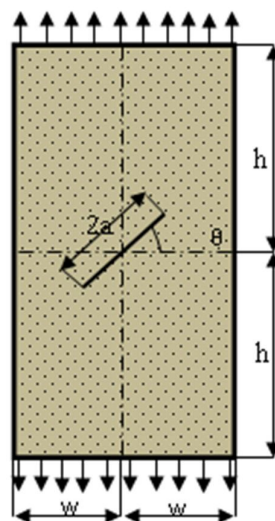
| $\frac{K_{II}}{(\sigma\sqrt{\pi a})}$ |       | $\frac{K_I}{(\sigma\sqrt{\pi a})}$ |       | a/w |
|---------------------------------------|-------|------------------------------------|-------|-----|
| مرجع [۱۵]                             | 2DFPM | مرجع [۱۵]                          | 2DFPM |     |
| ۰/۵۱                                  | ۰/۵۱۳ | ۰/۵۲                               | ۰/۵۱۸ | ۰/۲ |
| ۰/۵۲                                  | ۰/۵۲۲ | ۰/۵۴                               | ۰/۵۴۰ | ۰/۳ |
| ۰/۵۳                                  | ۰/۵۳۵ | ۰/۵۷                               | ۰/۵۷۲ | ۰/۴ |
| ۰/۵۵                                  | ۰/۵۵۲ | ۰/۶۱                               | ۰/۶۱۲ | ۰/۵ |
| ۰/۵۷                                  | ۰/۵۷۳ | ۰/۶۶                               | ۰/۶۶۲ | ۰/۶ |

### ۳-۵- ترک تحت کشش و عمود بر فصل مشترک در محیط همگن

برای ارزیابی بهتر کارایی روش عددی ارائه شده در مدل‌سازی گسترش شکست هیدرولیکی در محیط‌های لایه‌ای، مسئله‌ی برخورد ترک تحت کشش با فصل مشترک مقید شده که دارای حل تحلیلی (حل وسترگارد) نیز است، مورد بررسی قرار گرفت.

### ۲-۵- ترک مرکزی ۲۰ زاویه‌دار در محیط محدود

برای اعتبارسنجی روش ارائه شده در محیط محدود، مدل‌سازی یک ترک مرکزی زاویه‌دار در درون یک صفحه با ابعاد محدود صورت گرفته و مقادیر طبیعی شده‌ی فاکتور شدت تنش برای نوک ترک محاسبه گردید. در این مسئله یک ترک با طول  $2a$  در درون صفحه‌ای با نسبت طول به عرض  $2(h/w)$  مدل‌سازی گردید که ترک نسبت به محور X با زاویه‌ی ۴۵ قرار دارد (شکل ۷). صفحه تحت تنش کششی  $\sigma$  قرار دارد که به صورت قرینه بر انتهای صفحه‌ی محدود وارد می‌شوند.



شکل ۷: صفحه‌ی محدود دارای ترک مرکزی زاویه‌دار تحت کشش برای حل این مسئله مرز صفحه مش‌بندی شده و ۴۰

سانتیمتری به ۴۰ مگاپاسکال می‌رسد. با توجه به محدود بودن حداکثر تنش کششی در بازه‌ی ۱- تا ۱ سانتیمتر و همچنین بالاتر بودن میزان تنش کششی نسبت به مقاومت کششی، ترک در حالت عمود بر فصل مشترک به مسیر خود ادامه خواهد داد.

#### ۶- شکست هیدرولیکی در محیط دو لایه

##### ۶-۱- شکست هیدرولیکی عمود بر فصل مشترک

برای بررسی تأثیر تغییر خصوصیات الاستیک لایه‌ها و همچنین تأثیر وضعیت شکستگی هیدرولیکی نسبت به فصل مشترک لایه‌ها بر نحوه‌ی توزیع تنش‌های برشی و کششی در امتداد فصل مشترک و میزان فاکتور شدت تنش در نوک ترک مدلسازی این فرآیند صورت پذیرفت. مرز دو لایه در این مدلسازی‌ها مقید در نظر گرفته شده به گونه‌ای که قابلیت باز شدن و لغزیدن ندارد (شکل ۱۰). نسبت پواسون برای هر دو محیط در تمام مدلسازی‌های شکست هیدرولیکی ۰/۲ در نظر گرفته شده است.

میزان تنش کششی و فاکتور شدت تنش، دو عامل تعیین‌کننده در گسترش یا توقف شکست هیدرولیکی می‌باشند. زمانی که نوک ترک به نزدیکی فصل مشترک موجود بین دو محیط با پارامترهای الاستیک مختلف می‌رسد، فاکتور شدت تنش در نوک ترک شروع به تغییر کردن می‌کند. اگر محیط مقابل نرم باشد (دارای مدول الاستیسیته‌ی پایین‌تری باشد) فاکتور شدت تنش در نوک ترک در حال برخورد به فصل مشترک، نسبت به نوک دیگر افزایش می‌یابد، و اگر محیط مقابل سخت باشد (دارای مدول الاستیسیته‌ی بالاتری باشد) فاکتور شدت تنش در نقطه‌ی B کمتر از نقطه‌ی A خواهد بود (جدول ۲). این موضوع نشان‌دهنده‌ی این است که اگر محیط مقابل دارای مدول بالاتری باشد به عنوان یک مانع برای گسترش شکست هیدرولیکی عمل خواهد کرد، حتی اگر چقرمگی ماده سنگ در دو محیط تفاوت نکند. این موضوع که بر اساس اصول مکانیک شکست برداشت می‌شود نیازمند این است که اختلاف مدول‌های دو محیط زیاد باشد.

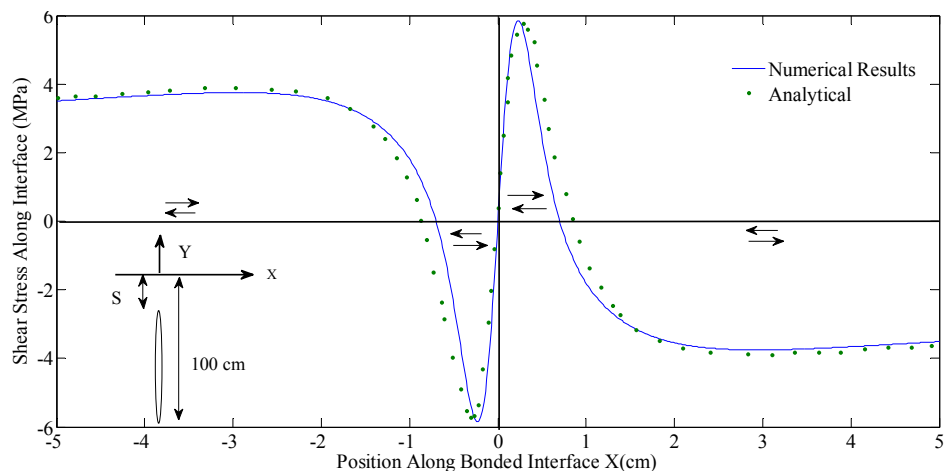
تغییر تنش در اطراف نوک شکست هیدرولیکی که در نزدیکی فصل مشترک قرار دارد نیز به عنوان پارامتر تأثیرگذار دیگری نیز مطرح است. زیرا در مواد با مقاومت کششی پایین (همانند سنگ) تنش کششی ایجاد شده در اطراف نوک شکستگی قادر خواهد بود که ترک‌های دیگری را در آن طرف فصل مشترک ایجاد کند و یا باعث تداوم انتشار ترک اصلی گردد.

حل وسترگارد نشان می‌دهد که در مدلسازی محیط محدود، تغییر شکل مرزهایی که با فاصله‌ی ۱۰ متر از ترک قرار دارند از تغییر شکل ترک تأثیر عمده‌ای نمی‌پذیرند. بنابراین این فاصله برای مرزهای بیرونی مسئله مناسب است، ولی برای محافظه‌کاری بیشتر، مرزهای بیرونی با فاصله‌ی ۲۰ متر از ترک درونی مدل گردیدند. به دلیل مشابه، فصل مشترک لایه‌ها نیز ۲۰ متر از دو طرف گسترش داده شده‌اند. آنالیز حساسیت برای طول المان نشان می‌دهد که المان‌های موجود در امتداد مرزهای مدل با طول کمتر از ۰/۵ متر تأثیر عمده‌ای بر میزان بازشدگی ترک ندارند، بنابراین این طول المان برای مرزهای بیرونی در نظر گرفته شد.

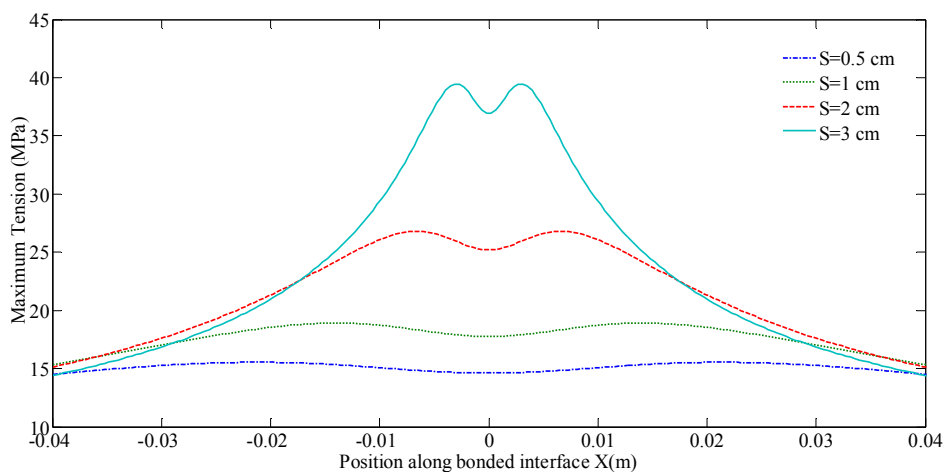
طول المان‌های موجود در امتداد شکستگی و فصل مشترک هم باید به اندازه‌ای کوچک باشند که بتوانند تنش‌ها و تغییر شکل‌های پیچیده‌ی نزدیک نوک ترک را رصد نمایند. انتخاب این طول زمانی که فاصله‌ی ترک و فصل مشترک کم است، مهم است. توزیع تنش برشی در امتداد فصل مشترک به دلیل تغییرات در جهت برش، بسیار پیچیده‌تر از توزیع تنش نرمال است. برای مدلسازی دقیق تغییر شکل موجود در امتداد فصل مشترک، طول آن به سه قسمت تقسیم و طول المان‌ها در فاصله‌ی ۲۵ سانتیمتری از هر طرف نوک ترک یک میلی‌متر در نظر گرفته شد. در بیرون این ناحیه نیز طول المان‌ها چهار سانتیمتر در نظر گرفته شد. استفاده از المان‌های با طول کوچک و برابر در امتداد مرزها، شکستگی و فصل مشترک خطاهای محاسبات تنش و کرنش را حداقل می‌کند [۱۲].

در این مسئله یک ترک تحت کشش (۵ مگاپاسکال) که عمود بر سطح فصل مشترک بوده و با فاصله‌ی ۰/۵ سانتیمتر از آن قرار دارد، مدلسازی گردید. خصوصیات الاستیک محیط‌های دو طرف فصل مشترک یکسان در نظر گرفته شده‌اند. توزیع تنش برشی در امتداد فصل مشترک و دقیقاً روبروی نوک ترک در شکل ۸ نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که توزیع تنش برشی حاصل از روش عددی با نتایج تحلیلی (برگرفته از منبع [۲])، که به روش رقمی کردن به دست آمده است) تطابق مناسبی دارد.

تغییرات تنش کششی ایجاد شده در امتداد فصل مشترک، برای فواصل مختلف ترک از فصل مشترک در شکل ۹ ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد که در دو نقطه، حداکثر تنش کششی رخ می‌دهد که هر دو در بازه‌ی یک سانتیمتری از نوک ترک قرار دارند. میزان تنش کششی ایجاد شده برای ترک با فاصله‌ی کمتر، بیشتر است که برای فاصله‌ی ۰/۵



شکل ۸: تنش برشی ایجاد شده در امتداد فصل مشترک برای ترک که در فاصله‌ی ۰/۵ سانتیمتر از فصل مشترک قرار دارد.

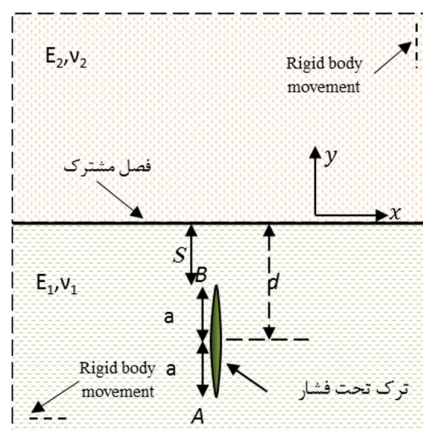


شکل ۹: حداکثر تنش کششی ایجاد شده در امتداد فصل مشترک ناشی از حضور ترک برای فواصل

جدول ۲: مقادیر فاکتور شدت تنش طبیعی شده برای

شکستگی عمود بر فصل مشترک

| $\frac{K_I}{(\sigma\sqrt{\pi a})}$<br>در نقطه‌ی A | $\frac{K_I}{(\sigma\sqrt{\pi a})}$<br>در نقطه‌ی B | $(G_2/G_1)$ |
|---|---|-------------|
| ۰/۱۱۹   | ۰/۱۹۰   | ۰/۱         |
| ۰/۲۲۷   | ۰/۳۲۷   | ۰/۲         |
| ۰/۵۲۸   | ۰/۶۲۸   | ۰/۵         |
| ۱/۰۰  | ۱/۰۱  | ۱           |
| ۱/۹۱۱   | ۱/۶۱۷   | ۲           |
| ۴/۵۷۰   | ۳/۱۸۲   | ۵           |
| ۸/۹۵۲   | ۵/۶۱۷   | ۱۰          |



شکل ۱۰: شکستگی هیدرولیکی قائم در محیط ۱ و عمود بر فصل مشترک دو لایه

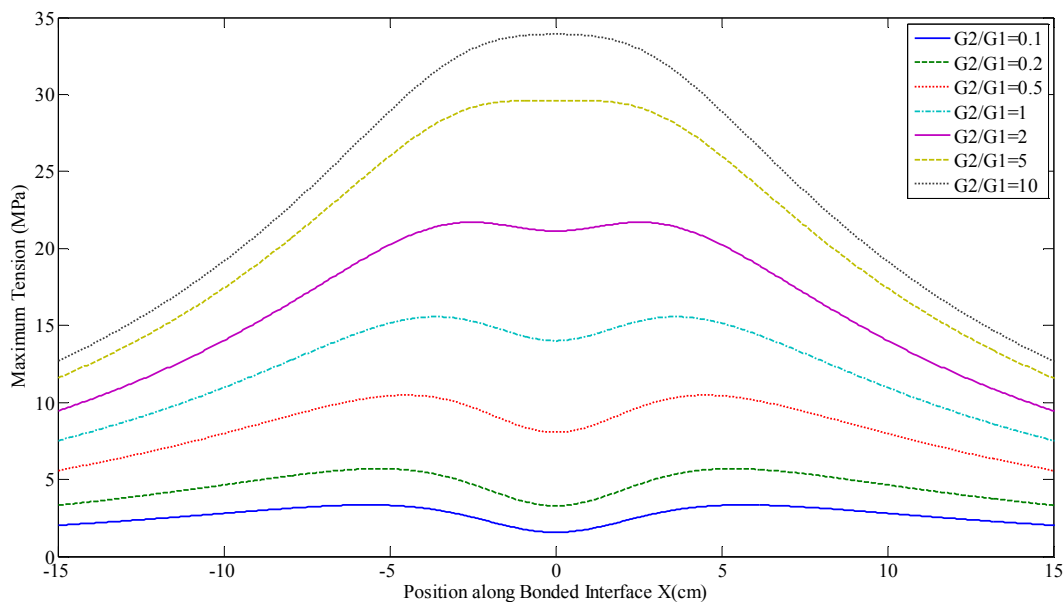


مشترک و دقیقاً در جلوی نوک ترک برای فواصل مختلف شکست هیدرولیکی از فصل مشترک، نشان می‌دهد. همان‌گونه که نشان داده شد تنش کششی در جلوی نوک ترک دارای دو اوج است و میزان آن بافاصله از نوک ترک به شدت کاهش می‌یابد. دو نقطه‌ای که تنش کششی در آن‌ها حداکثر بوده در فاصله‌ی کمی نسبت به نوک ترک قرار دارند که احتمال شروع ریز ترک‌هایی در این نقاط و در آن سوی فصل مشترک وجود دارد. با کاهش فاصله‌ی شکست هیدرولیکی از فصل مشترک، گسترش آن به شدت مشکل می‌شود، هرچند که تنش‌های کششی در آن سوی فصل مشترک و در محیط با مدول بالا افزایش یابند.

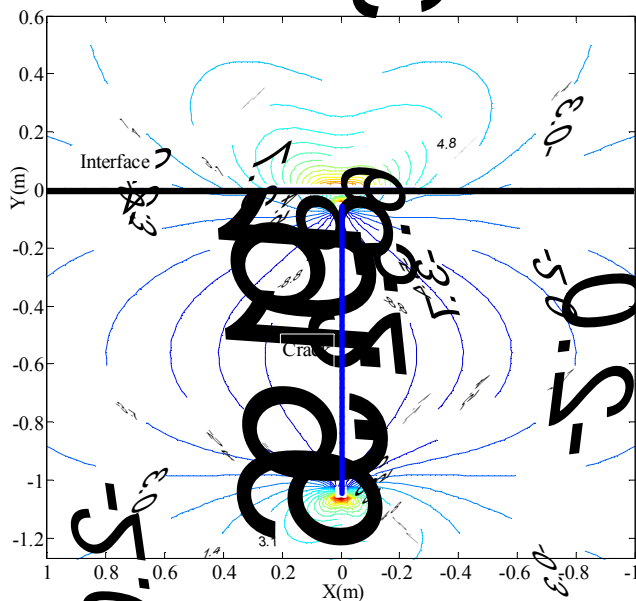
نتایج حاصل از آنالیز تنش کششی در امتداد فصل مشترک و همچنین میزان فاکتور شدت تنش نشان می‌دهد که در محیط‌های لایه‌ای که در آن‌ها فصل مشترک مقید شده و قابلیت باز شدن و لغزش را ندارد شکستگی هیدرولیکی می‌تواند در لایه‌ی مقابل با مدول الاستیسیته‌ی بالاتر نفوذ کند و همچنین دارای بازشدگی متناسب با پارامترهای الاستیسیته‌ی آن محیط باشد.

همان‌گونه که در شکل ۱۱ نشان داده شده است میزان تنش‌های کششی با افزایش مدول الاستیک محیط مقابل افزایش یافته و با توجه به مقادیر بالای آن‌ها نسبت به مقاومت کششی سنگ می‌تواند باعث گسترش شکستگی هیدرولیکی و یا پرش شکستگی در آن سوی فصل مشترک گردند. برای شکستگی هیدرولیکی با طول یک متر و تحت فشار داخلی ۱۰ مگاپاسکال که در فاصله‌ی ۵ سانتیمتری از فصل مشترک قرار دارد، میزان تنش کششی ایجاد شده در امتداد فصل مشترک در محیطی با مدول الاستیسیته‌ی ده برابر نسبت به محیط اول به ۳۴ مگاپاسکال می‌رسد که به مراتب از مقاومت کششی سنگ در این محیط بیشتر است. این مقدار تنش برای شروع یک ترک کششی در اغلب محیط‌های سنگی کافی بوده که باعث پرش شکست هیدرولیکی از روی فصل مشترک می‌گردد. منحنی‌های همتراز تنش کششی در روبروی نوک شکستگی هیدرولیکی برای نسبت مدولی ۱۰ در شکل ۱۲ ارائه شده است.

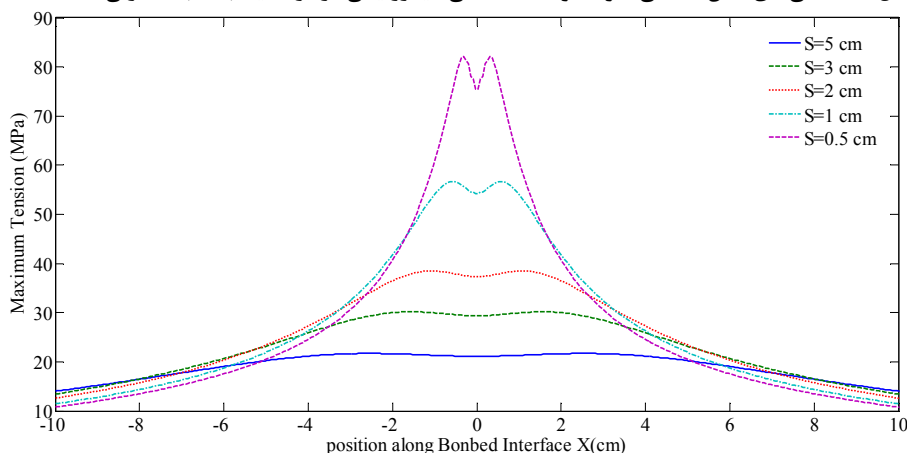
با کاهش فاصله‌ی شکست هیدرولیکی نسب به فصل مشترک میزان این تنش‌های کششی ایجاد شده نیز افزایش می‌یابد. شکل ۱۳ تغییرات تنش کششی را در امتداد فصل



شکل ۱۱: تغییرات تنش کششی در امتداد فصل مشترک در روبروی نوک ترک با تغییر نسبت مدول الاستیسیته‌ی دو محیط



شکل ۱۲: منحنی‌های تنش کششی اطراف نوک شکستگی هیدرولیکی در دو محیط با نسبت مدولی  $G_2/G_1=10$



شکل ۱۳: تغییرات تنش کششی در امتداد فصل مشترک در روبروی نوک ترک با تغییر فاصله از فصل مشترک

### ۲-۶- شکست هیدرولیکی گذرنده از فصل مشترک

به منظور ارزیابی تأثیر اختلاف پارامترهای الاستیسیته‌ی در لایه‌های مجاور بر رفتار شکست هیدرولیکی و میزان بازشدگی آن و در نهایت توانایی شکستگی برای انتقال سیال موجود در محیط، یک شکستگی عمود بر فصل مشترک و گذرنده از آن مورد بررسی قرار گرفت (شکل ۱۴).

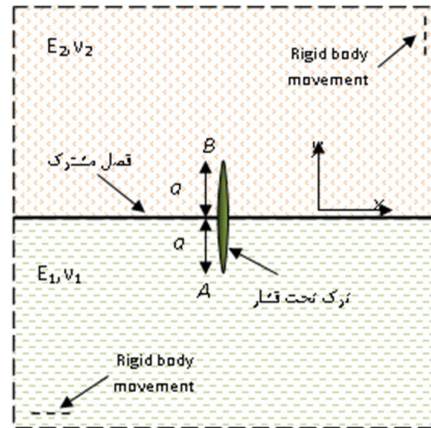
مقادیر فاکتور شدت تنش طبیعی شده نشان می‌دهد که در محیط نرم‌تر به دلیل تغییر شکل بیشتر دیواره‌ی شکست هیدرولیکی، فاکتور شدت تنش مد بازشدگی ( $K_I$ ) بیشتر است و در نتیجه قابلیت رشد شکستگی در این محیط بیشتر است (جدول ۳).

توزیع تنش‌های کششی در اطراف نوک ترک در دو محیط

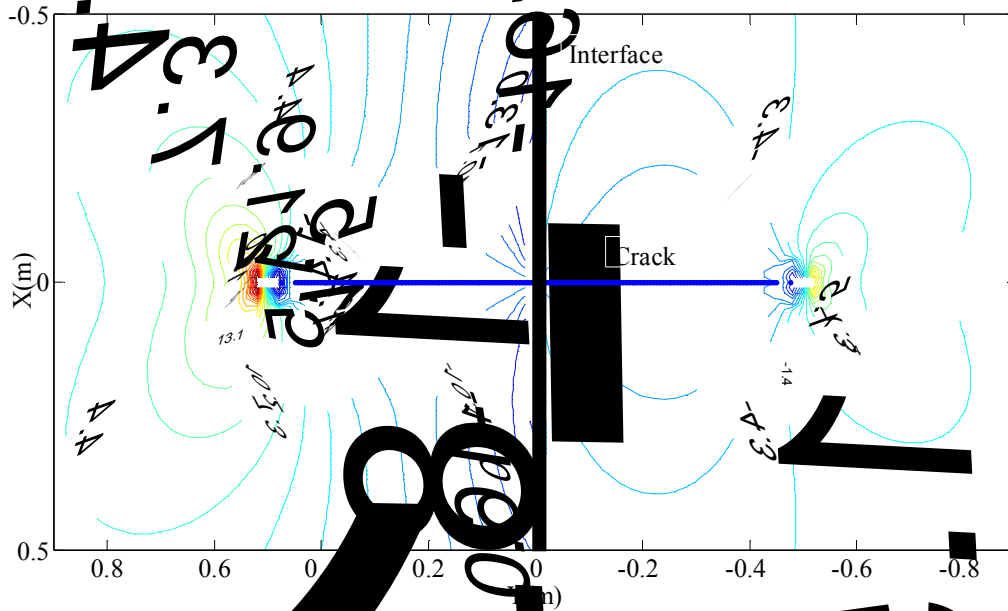
سخت و نرم نشان می‌دهد که تنش‌های کششی در محیط سخت به مراتب بیشتر بوده و از مقاومت کششی سنگ در این ناحیه بالاتر خواهد رفت (شکل ۱۵)، بنابراین هرچند که فاکتور شدت تنش در این محیط نسبت به محیط نرم‌تر، پایین‌تر است، ولی توزیع تنش‌های کششی نشان می‌دهد که شکستگی هیدرولیکی نیز می‌تواند در این محیط به راحتی گسترش یابد. همانند قسمت قبل، میزان بازشدگی شکستگی در محیط سخت‌تر، کمتر بوده و سیال کمتری در درون آن نفوذ خواهد کرد. از طرفی نتایج میزان بازشدگی نشان می‌دهد که عرض شکستگی در محیط نرم‌تر بیشتر بوده است و نهایتاً میزان سیال بیشتری را به درون خود هدایت خواهد کرد (شکل ۱۶).

جدول ۳: مقادیر فاکتور شدت تنش طبیعی شده برای شکست هیدرولیکی گذرنده از فصل مشترک

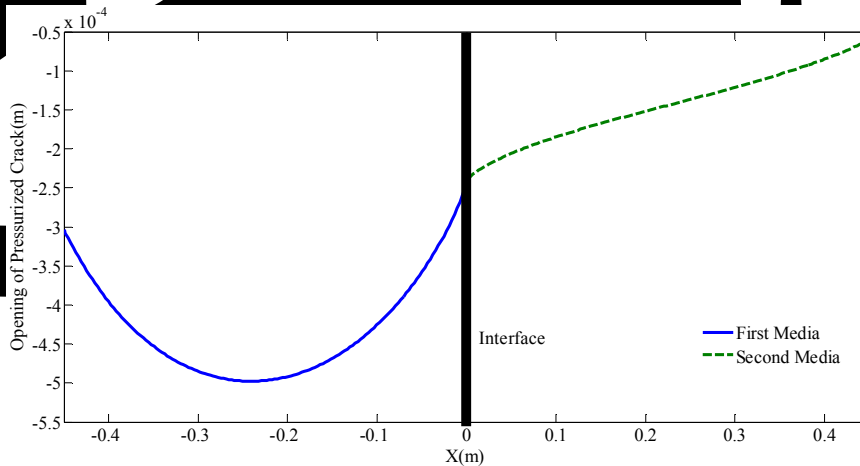
| $\frac{K_I}{(\sigma\sqrt{\pi a})}$<br>در نقطه‌ی A | $\frac{K_I}{(\sigma\sqrt{\pi a})}$<br>در نقطه‌ی B | $(G_2/G_1)$ |
|---|---|-------------|
| ۱/۰۰۲   | ۱/۰۰۲   | ۱           |
| ۰/۵۶۱   | ۰/۸۹۸   | ۰/۵         |
| ۰/۲۶۰   | ۰/۷۸۶   | ۰/۲         |
| ۰/۱۴۲   | ۰/۷۲۰   | ۰/۱         |



شکل ۱۴: شکستگی هیدرولیکی عمود بر فصل مشترک دو لایه و گذرنده از آن



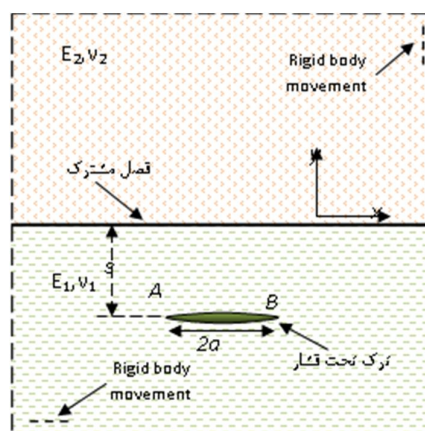
شکل ۱۵: کششی در اطراف شکستگی هیدرولیکی در محیط  $(G_2/G_1=+1)$



شکل ۱۶: میزان بازشکستگی هیدرولیکی در دو محیط  $(\nu=2)$

### ۳-۶- شکست هیدرولیکی موازی با فصل مشترک

برای شکست هیدرولیکی موازی با فصل مشترک نیز بررسی‌های مکانیک شکستی به همراه توزیع تنش صورت گرفت. نتایج نشان داد که برای شکست هیدرولیکی با طول یک متر و موجود در محیط اول که در فاصله‌ی ۱۰ سانتیمتری و موازی با فصل مشترک قرار دارد (شکل ۱۷)، با افزایش نسبت مدولی، فاکتور شدت تنش برای مد یک و دو شکست افزایش می‌یابد (جدول ۳).



شکل ۱۷: شکستگی هیدرولیکی افقی در محیط ۱ و موازی با فصل مشترک دو لایه و با فاصله‌ی S از آن

جدول ۴: مقادیر فاکتور شدت تنش طبیعی شده برای شکست هیدرولیکی موجود در محیط ۱ و موازی با فصل مشترک

| $\frac{K_{II}}{(\sigma\sqrt{\pi a})}$<br>در نقطه‌ی A و B | $\frac{K_I}{(\sigma\sqrt{\pi a})}$<br>در نقطه‌ی A و B | فاصله از فصل مشترک | $(G_2/G_1)$ |
|--|---|--------------------|-------------|
| -۰/۰۰۲   | ۱/۰۰  | $S=۰/۱$            | ۱           |
| ۰/۰۰   | ۱/۰۰  | $S=۰/۵$            |             |
| -۰/۱۳۸   | ۱/۷۷۱   | $S=۰/۱$            | ۲           |
| -۰/۴۶۰   | ۱/۸۸۰   | $S=۰/۵$            |             |
| -۰/۶۴۱   | ۳/۹۶۰   | $S=۰/۱$            | ۵           |
| -۰/۲۳۱   | ۴/۴۳۷   | $S=۰/۵$            |             |
| ۰/۰۴۸  | ۰/۵۸۹   | $S=۰/۱$            | ۰/۵         |
| ۰/۰۱۷  | ۰/۵۴۶   | $S=۰/۵$            |             |
| ۰/۰۵۶  | ۰/۳۰۸   | $S=۰/۱$            | ۰/۲         |
| ۰/۰۱۶  | ۰/۲۴۶   | $S=۰/۵$            |             |
| ۰/۰۵۲  | ۰/۱۹۵   | $S=۰/۱$            | ۰/۱         |
| ۰/۰۱۲  | ۰/۱۳۳   | $S=۰/۵$            |             |

در نسبت مدولی بالاتر از یک با کاهش فاصله از فصل مشترک، فاکتور شدت تنش برای مد یک کاهش و برای مد دو افزایش می‌یابد. ولی در نسبت مدولی کمتر از یک با کاهش فاصله از فصل مشترک، مد یک شکست افزایش و مد دو کاهش می‌یابد. با افزایش نسبت مدولی شکست هیدرولیکی تمایل دارد که از مسیر مستقیم خود خارج شود و بنابراین دارای انحراف خواهد گردید. نتایج حاصل نشان می‌دهند که میزان فاصله و نسبت بین پارامترهای الاستیسیته‌ی لایه‌ها بر نحوه‌ی گسترش شکست هیدرولیکی در چنین محیط‌هایی تأثیر خواهد داشت.

### ۷- نتیجه‌گیری

میزان تأثیر لایه‌بندی و پارامترهای الاستیسیته‌ی لایه‌ها بر نحوه‌ی گسترش شکست هیدرولیکی در محیط‌های لایه‌ای مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان داد که دو عامل شدت تنش و میزان تنش‌های کششی ایجادشده در آن سوی ناپیوستگی در حالتی که شکستگی بر فصل مشترک عمود است، عوامل مهم در تعیین نحوه‌ی رشد شکستگی هیدرولیکی می‌باشند.

در صورت عبور شکست هیدرولیکی از فصل مشترک، میزان انتشار آن تابع میزان بازشدگی است، که در محیط‌های با پارامترهای الاستیسیته‌ی پایین‌تر، میزان بازشدگی بیشتر است و در نتیجه فاکتور شدت تنش هم بیشتر خواهد بود. در آن سوی، در محیط با مدول الاستیک بالاتر میزان تنش‌های کششی ایجادشده تعیین کننده‌ی رشد شکستگی خواهند بود. برای شکستگی موازی با فصل مشترک، با افزایش نسبت مدولی، مد یک شکست نیز افزایش می‌یابد که باعث تسهیل در گسترش شکست هیدرولیکی می‌گردد. از طرف دیگر تغییر در فاصله‌ی شکستگی نسبت به فصل مشترک نیز در روند گسترش تأثیر می‌گذارد به گونه‌ای که با کاهش فاصله در دو حالت نسبت مدولی بالای یک و پایین یک، مد یک شکست به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابد.

### ۸- مراجع

- [1] Clark, J. B.; 1949; *hydraulic process for increasing the productivity of wells*; Petroleum Trans. American Institute of Mining and Energy, v. 186, p. 1-8.
- [2] Cooke, M.L., Underwood, C.A.; 2001; *Fracture termination and step-over at bedding interfaces due to frictional slip and interface opening*; Journal of Structural Geology, vol 23, 223-238
- [3] Smith. M. B., et al.; 2001.; *Layered Modulus Effects on Fracture Propagation; Proppant Placement, and Fracture Modeling*. SPE 71654.

- 
- 1- proppant
  - 2- boundary element
  - 3- finite element
  - 4- Displacement discontinuity method
  - 5- indirect boundary element method
  - 6- higher order element
  - 7- sub-element
  - 8- singularity
  - 9- Constant element
  - 10- Quadratic Element
  - 11- shape functions
  - 12- harmonic functions
  - 13- inhomogeneous body
  - 14- boundary value problem
  - 15- free portions
  - 16- continuity conditions
  - 17- straight line segments
  - 18- traction
  - 19- Annulus inside a circular hole in a plate
  - 20- center crack

- [4] Aliabadi, M.H., Rooke, D.P.; 1991; *Numerical Fracture Mechanics*; Computational Mechanics Publications, Southampton, UK.
- [5] Aliabadi, M.H.; 1998; *Fracture of Rocks*; Computational Mechanics Publications, Southampton, UK.
- [6] Scavia, C.; 1995; *A method for the study of crack propagation in rock structures*; Géotechnique 45(3), 447–463.
- [7] Shou, K.J., Crouch, S.L.; 1995; *A higher order displacement discontinuity method for analysis of crack problems*; Int. J. Rock Mech. Miner. Sci. Geomech. Abstr. 32, 49–55.
- [8] Tan, X.C., Kou, S.Q. Lindqvist, P.A.; 1996; *Simulation of rock fragmentation by indenters using DDM and fracture mechanics*; In: Aubertin, M., Hassani, F., Mitri, H. (Eds.), *Rock Mechanics, Tools and Techniques*. Balkema, Rotterdam.
- [9] Marji M. F., Hosseini\_Nasab, H. and Kohsary A. H.; 2006; *On the uses of special crack tip elements in numerical rock fracture mechanics*; Int. J. Solids and Struct., 43,1669- 1692.
- [10] Hossaini Nasab H., Marji M. F.; 2007; *A Semi-Infinite Higher-Order Displacement Discontinuity Method and its Application to the Quasistatic Analysis of Radial Cracks Produced by Blasting*; J. Mechanics of Materials and Structures, Vol. 2, No. 3.
- [11] Marji M. F., Dehghani I.; 2010; *Kinked Crack Analysis by A Hybridized Boundary Element/Boundary Collocation Method*; Int. J. of Solids and Structures
- [12] Crouch, S.L., Starfield, A.M.; 1990; *Boundary Element Methods in Solid Mechanics*; Allen and Unwin, London.
- [13] Rossmannith, H P.; 1983; *Rock Fracture Mechanics*. Springer Verlagwien, New York.
- [14] Whittaker, B.N., Singh, R.N., Sun, G.; 1992; *Rock Fracture Mechanics, Principles, Design and Applications*; Elsevier, The Netherlands.
- [15] Aliabadi, M.H.; 1996; *Database of Stress Intensity Factors*; Computational Mechanics Publications, Southampton, UK.