

تأثیر گام زمانی بر دقت نتایج در شبیه‌سازی حرکت ذرات به روش اجزای گسسته (راگ)

علیرضا قاسمی^۱، سید امید موسوی^۲، صمد بنیسی^{۳*}

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد فرآوری مواد معدنی، بخش مهندسی معدن، دانشگاه شهید باهنر کرمان

۲- دانشجوی کارشناسی استخراج معدن، بخش مهندسی معدن، دانشگاه شهید باهنر کرمان

۳- استاد، بخش مهندسی معدن، دانشگاه شهید باهنر کرمان

(دریافت فروردین ۹۲، پذیرش آذر ۹۳)

چکیده

روش اجزای گسسته (راگ) جهت شبیه‌سازی حرکت ذرات در سیستم‌های فرآوری کاربرد وسیعی دارد. اساس این روش محاسبه نیروهای متقابل میان ذرات در هر برخورد و مدل کردن موقعیت جدید ذرات است. تعداد زیاد اجزا و روابط متعدد، باعث طولانی شدن زمان انجام محاسبات در راگ می‌شود. زمان لازم برای محاسبات بستگی زیادی به گام زمانی انتخاب شده برای شبیه‌سازی دارد. اگر گام زمانی کوچک در نظر گرفته شود، حجم محاسبات و به دنبال آن زمان لازم جهت شبیه‌سازی افزایش می‌یابد. از طرف دیگر، در صورتی که گام زمانی بزرگ در نظر گرفته شود، شبیه‌سازی به دلیل عدم توجه لازم به فرآیند برخورد، با خطا همراه خواهد بود. در راگ گام زمانی به صورت ضربی از زمان تماس دو ذره در یک برخورد، در نظر گرفته می‌شود. هدف این پژوهش ارائه‌ی رابطه‌ای برای تعیین گام زمانی شبیه‌سازی با توجه به شرایط عملیاتی و میزان خطای شبیه‌سازی بود. برای این کار ابتدا رابطه‌ی بین ضریب زمان تماس و خطای شبیه‌سازی ارائه شد و روابط معمول زمان تماس اصلاح گردید. نتایج نشان دادند که گام زمانی لازم جهت شبیه‌سازی با خطای ۵٪ برای ذراتی به شعاع ۳ سانتیمتر، مدول الاستیسیته‌ی ۲۱۰ گیگا پاسکال با سرعت نسبی برخورد ۰/۵ متر بر ثانیه، با استفاده از مدل نیروی برخورد هرتز- میندلین ۲/۳ میکروثانیه است که تقریباً ۱۲ برابر بیشتر از مدل خطی است. به منظور سرعت بخشیدن به محاسبات که با بزرگ مقیاس کردن اندازه‌ی ذرات حاصل می‌شود، مشخص گردید که با افزایش شعاع ذرات به ۱ متر، گام زمانی لازم برای شبیه‌سازی، ۳۳ برابر افزایش می‌یابد. کاهش مدول الاستیسیته به مقدار ۲/۱ مگاپاسکال باعث افزایش ۳۱۶ برابری گام زمانی در مدل خطی و ۱۰۰ برابری در مدل هرتز- میندلین گردید.

کلمات کلیدی

روش اجزای گسسته (راگ)، گام زمانی شبیه‌سازی، زمان تماس، مدل نیروی برخورد خطی و هرتز- میندلین

۱- مقدمه

خطای شبیه‌سازی است. تلاش اصلی، انجام شبیه‌سازی دقیق، با صرف مناسب‌ترین زمان برای محاسبات است.

برای این کار ابتدا با تعریف پارامتر خطای شبیه‌سازی، روند تغییرات خطای شبیه‌سازی بر حسب ضریب گام زمانی (کسری از زمان تماس) برای دو مدل نیروی برخورد مورد بررسی قرار گرفت. در مرحله بعد، گام زمانی لازم جهت شبیه‌سازی با خطای ۵٪ محاسبه گردید. در ادامه، راهکارهایی جهت افزایش گام زمانی شبیه‌سازی ارائه گردید و مورد بررسی قرار گرفت.

شبیه‌سازی راگ ابتدا در سال ۱۹۷۹ توسط Cundall [۷] برای مدل‌سازی رفتار دانه‌های خاک تحت بارگذاری دینامیکی ارائه شد. در فرآوری مواد معدنی در سال ۱۹۹۱، Mishra و Rajamani [۱۴]، با شبیه‌سازی دو بعدی حرکت بار در آسیای گلوله‌ای آزمایشگاهی و اعتبارسنجی نتایج آن با واقعیت راگ را وارد این عرصه کردند. پس از آنان Cleary [۱۵] در سال ۱۹۹۸ با ارائه‌ی پژوهشی، توان‌کشی، جدانشینی و حرکت بار را در سرعت‌ها و پرشدگی‌های مختلف در آسیای گلوله‌ای به صورت دو بعدی مورد بررسی قرار داد. بعدها روند شبیه‌سازی آسیا توسط محققان زیادی دنبال گردید [۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰].

در سال‌های اولیه‌ی ورود راگ در بحث فرآوری مواد معدنی، آسیاهای گردان تنها تجهیزاتی بودند که مورد شبیه‌سازی قرار گرفتند؛ اما بعدها راگ برای شبیه‌سازی عملیات سرنده‌کنی [۲۱، ۲۲، ۲۳]، عملیات هیدروسیکلون [۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸]، فرآیند جدایش در جیگ [۲۹، ۳۰]، فرآیند نمونه‌گیری [۳۱، ۳۲، ۳۳]، انتقال کانه [۳۴، ۳۵]، آسیای همزن‌دار [۱، ۴]، عملیات سنگ‌شکن [۳۷، ۳۸]، بکار گرفته شد.

۱-۱- اساس شبیه‌سازی با راگ

در راگ موقعیت (X) ذرات زمانی که به صورت آزادانه در محیط حرکت کنند بر اساس سرعت (V) آن‌ها و شتاب گرانش (g)، در هر لحظه محاسبه می‌گردد (روابط ۱ و ۲).

$$X = V \Delta t \quad (1)$$

$$V = g \Delta t \quad (2)$$

اما در صورتی که ذرات با یکدیگر برخورد داشته باشند، علاوه بر شتاب گرانش، شتابی دیگر که ناشی از نیروی

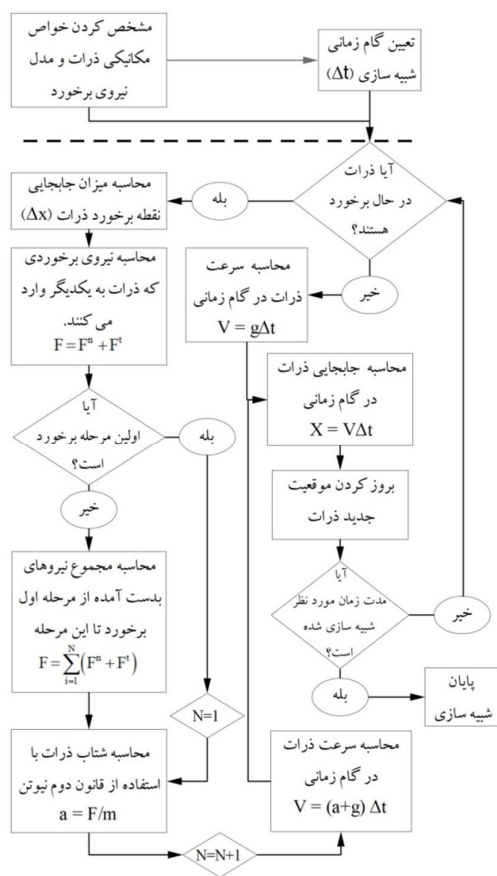
در سال‌های اخیر شبیه‌سازی رفتار ذرات در سیستم‌های فرآوری به خصوص آسیاها مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است [۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶]. روش اجزای گسسته (راگ) از جمله مهم‌ترین این روش‌هاست. شبیه‌سازی با راگ شامل دنبال کردن حرکت هر یک از ذرات در جریان ذره‌ای و مدل کردن برخوردهای آنان با یکدیگر و محیط پیرامون است [۷، ۸]. در راگ، هر یک از ذرات با یک سری خصوصیات ثابت مانند شکل، اندازه، چگالی، مدول الاستیسیته و نسبت پواسون شناخته می‌شوند. در هنگام شبیه‌سازی با توجه به خصوصیات ثابت و قوانین فیزیکی، در هر لحظه خصوصیات متغیر ذرات محاسبه می‌شود که این خصوصیات شامل سرعت، شتاب و موقعیت است.

مهم‌ترین بخش راگ، مدل کردن صحیح نیروهای برخورد و تعیین گام زمانی مناسب برای شبیه‌سازی است. مدل‌های زیادی جهت تعیین نیروی برخورد ذرات ارائه شده است [۷، ۹، ۱۰، ۱۱] که در بین آنان دو مدل نیروی برخورد خطی و هرتز-میندلین بیش‌ترین کاربرد را دارند. گام زمانی شبیه‌سازی در راگ، معمولاً به صورت ضریبی از زمان تماس دو ذره در هنگام برخورد در نظر گرفته می‌شود. زمان تماس دو ذره علاوه بر جنس و اندازه‌ی ذرات به مدل نیروی برخورد استفاده شده در شبیه‌سازی نیز وابسته است [۱۲].

زمان انجام محاسبات در راگ به دلیل تعداد زیاد ذرات و روابط متعدد، بسیار طولانی است. به‌طور مثال، زمان انجام محاسبات، برای شبیه‌سازی ۳ ثانیه از یک آسیا، با ۱۸۰ هزار ذره، به وسیله‌ی یک پردازنده‌ی تک هسته‌ای، حدود ۴۵ ساعت به طول می‌انجامد [۱۳]. زمان انجام محاسبات بستگی زیادی به اندازه‌ی گام زمانی شبیه‌سازی دارد. لذا هرچه گام زمانی شبیه‌سازی کوچک در نظر گرفته شود، زمان لازم برای انجام محاسبات افزایش می‌یابد. از طرف دیگر، در صورتی که گام زمانی بزرگ در نظر گرفته شود، شبیه‌سازی به دلیل عدم توجه لازم به فرآیند برخورد، با خطا همراه خواهد بود.

هدف این پژوهش، ارائه‌ی رابطه‌ای برای تعیین گام زمانی شبیه‌سازی با توجه به شرایط عملیاتی و میزان

انجام محاسبات در شبیه سازی با راگ در شکل ۲ آمده است.



شکل ۲: الگوریتم انجام محاسبات در شبیه سازی با راگ

۲-۱- مدل های نیروی برخورد

برای تعیین مقدار نیروی کل وارده به ذرات، تعیین دقیق توابع سختی (K) و میرایی (C) از اهمیت زیادی برخوردار است. این توابع که در قالب مدل های نیروی برخورد ارائه می شوند، یکی از مهم ترین بخش هایی هستند که بر دقت نتایج شبیه سازی تأثیر گذارند و اعتبار شبیه سازی را تحت شعاع قرار می دهند. از این رو، تاکنون مدل های نیروی برخورد زیادی، با هدف نزدیک کردن نتایج شبیه سازی با واقعیت ارائه شده است [۴۰]. از بین مدل های نیروی برخورد ارائه شده، دو مدل نیروی برخورد خطی و هرتز-میندلین بیش ترین کاربرد را دارند و در بسیاری از نرم افزارهای راگ بنیان از این دو مدل استفاده می شود [۱۰، ۱۱۲].

برخورد است (رابطه ۳)، به آنان وارد شده و سرعت جدید این ذرات، با این شتاب محاسبه می گردد (رابطه ۴). این نیرو خود شامل دو مؤلفه عمودی (F^n) و مماسی (F^t) است (رابطه ۵). در این حالت ابتدا، میزان همپوشانی (Δx) هر یک از ذرات محاسبه می گردد. همپوشانی، میزان نفوذی است که دو ذره در اثر برخورد، پیدا می کنند. متناسب با میزان همپوشانی و با استفاده از مدل نیروی برخورد، نیروی اعمالی به هر یک از ذرات محاسبه می شود (تعریف پارامترها در ضمیمه آمده است).

$$a = \frac{F}{m} + g \quad (3)$$

$$V = a\Delta t \quad (4)$$

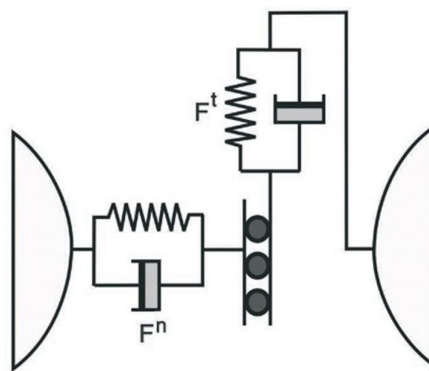
$$F = F^n + F^t \quad (5)$$

فرضیاتی برای ساده سازی محاسبات در راگ در نظر گرفته می شود. از جمله این فرضیات شبیه سازی نیروی برخورد بین دو ذره با استفاده از مدل فنر-میراگر است (شکل ۱).

در مدل فنر-میراگر، مؤلفه های عمودی (F^n) و مماسی (F^t) نیروهایی که به ذرات وارد می شود، با استفاده از روابط ۶ و ۷ محاسبه می شود.

$$F^n = K^n \int \Delta x^n + C^n V_{rel}^n \quad (6)$$

$$F^t = K^t \int \Delta x^t + C^t V_{rel}^t \quad (7)$$



شکل ۱: مدل نیروی برخورد فنر-میراگر [۳۹].

با داشتن مقدار جرم گلوله ها و محاسبه مؤلفه های نیرو با استفاده از روابط ۶ و ۷، مقادیر شتاب در جهت عمودی و مماسی و به دنبال آن سرعت و موقعیت جدید ذرات محاسبه می شود. به طور خلاصه، الگوریتم نحوه ی

۱-۲-۱- مدل نیروی برخورد خطی

مدل نیروی برخورد خطی، ساده‌ترین و درعین حال پرکاربردترین مدل نیروی برخورد است. در این مدل رابطه‌ی بین نیرو (F) و مقدار همپوشانی (Δx) در هر دو جهت عمودی و مماسی به صورت خطی در نظر گرفته می‌شود. به عبارت دیگر، مقدار تابع سختی و میرایی، مستقل از مقدار همپوشانی است. در این مدل تابع سختی و تابع میرایی در جهت عمودی از روابط ۸ و ۹ به دست می‌آید. در این روابط، عبارات ξ و m^* از روابط ۱۰ و ۱۱ قابل محاسبه است [۴۱].

$$K^n = \frac{K^{a,n} \times K^{b,n}}{K^{a,n} + K^{b,n}} \quad (۸)$$

$$C^n = 2\xi\sqrt{m^* \times K^n} \quad (۹)$$

$$\xi = \frac{-\ln(\zeta)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\zeta)}} \quad (۱۰)$$

$$m^* = \frac{m^a \times m^b}{m^a + m^b} \quad (۱۱)$$

در مدل نیروی برخورد خطی، زمان تماس دو ذره (ΔT) در هنگام برخورد از رابطه‌ی ۱۲ محاسبه می‌شود [۱۲].

$$\Delta T = \frac{\pi R \sqrt{\frac{\rho}{G}}}{0.1631v + 0.8766} \quad (۱۲)$$

۱-۲-۲- مدل نیروی برخورد هرتز- میندلین

این مدل بر اساس تئوری برخورد هرتز- میندلین است که در آن نیروی برخورد متناسب با ناحیه‌ی برخورد است. طبق این مدل، برخورد بین دو ذره در یک نقطه صورت نمی‌گیرد، بلکه در یک ناحیه محدود (که به علت تغییر شکل ذرات به وجود می‌آید) اتفاق می‌افتد [۴۲]. به عبارت دیگر می‌توان آن را مانند برخورد دو صفحه صلب در نظر گرفت که به میزان کمی در هم فرو می‌روند. تعیین دقیق توزیع نیرو و گشتاور اعمالی در این ناحیه به دلیل تأثیر عوامل متعدد هندسی و فیزیکی نظیر شکل، خواص و نحوه‌ی حرکت ذرات بسیار مشکل است [۴۳]. در مدل نیروی برخورد هرتز- میندلین، توابع سختی و میرایی در جهت عمودی به صورت روابط ۱۳ و ۱۴ تعریف می‌شود. در این مدل، تابع سختی و تابع میرایی به میزان همپوشانی ذرات وابسته هستند. در این توابع عبارات ξ ، m^* و K^*

R^* به ترتیب از روابط ۱۰، ۱۱، ۱۵ و ۱۶ به دست می‌آید [۴۱].

$$K^n = \frac{4}{3} K^* \sqrt{R^* \Delta x} \quad (۱۳)$$

$$C^n = \xi \sqrt{5m^* \times K^n} \quad (۱۴)$$

$$K^* = \frac{K^a \times K^b}{K^a + K^b} \quad (۱۵)$$

$$R^* = \frac{R^a \times R^b}{R^a + R^b} \quad (۱۶)$$

زمان تماس دو ذره، در مدل نیروی برخورد هرتز- میندلین در هنگام برخورد از رابطه‌ی ۱۷ و عبارت γ از رابطه‌ی ۱۸ به دست می‌آید [۴۱].

$$\Delta T = 2.9432 \sqrt{\frac{25\gamma m^2}{64V_{rel}}} \quad (۱۷)$$

$$\gamma = \frac{9}{16R} \left(\frac{1-v}{G} \right)^2 \quad (۱۸)$$

۱-۳- ضریب استرداد

ضریب استرداد ضریبی است که در شبیه‌سازی با راگ، بیان کننده‌ی میزان بازگشت جسم، پس از برخورد است و به نوعی میزان هدرروی انرژی در حین برخورد را نشان می‌دهد [۴۴].

ساده‌ترین راه تعیین این ضریب، مقایسه‌ی سرعت نسبی ذرات، قبل ($V_{rel,before}$) و بعد از برخورد ($V_{rel,after}$) است. بنا به تعریف، ضریب استرداد از رابطه‌ی ۱۹ قابل تعیین است.

$$\zeta = \frac{V_{rel,after}}{V_{rel,before}} \quad (۱۹)$$

۲- روش انجام تحقیق

۱-۲- خطای شبیه‌سازی

هرگاه دو جسم با یکدیگر برخورد می‌کنند، مقداری از انرژی خود را از دست می‌دهند. این انرژی صرف تولید صدا، گرما یا تغییر شکل می‌شود، بنابراین انتظار می‌رود که سرعتی که دو ذره پس از برخورد با یکدیگر خواهند داشت کمتر از سرعت قبل از برخورد آنان باشد. بدیعی است که پارامترهای زیادی از جمله جنس و خصوصیات سطحی ذرات بر سرعت پس از برخورد آنان و در نتیجه بر

گام زمانی شبیه‌سازی گفته می‌شود. شایان ذکر است که خطای شبیه‌سازی به مقدار مطلق زمان تماس بستگی ندارد و فقط وابسته به کسری از این زمان است که برای شبیه‌سازی در نظر گرفته می‌شود. این کسر با ضریب زمان تماس بیان می‌شود.

۲-۳- نحوه‌ی تعیین تأثیر ضریب زمان تماس بر خطای شبیه‌سازی

در این پژوهش تأثیر ضریب زمان تماس ($C_{\Delta t}$) بر خطای شبیه‌سازی (α)، از طریق شبیه‌سازی برخورد دو ذره، مورد بررسی قرار گرفت. جهت مطالعه‌ی تأثیر گام زمانی شبیه‌سازی - که برابر با ضریبی از زمان تماس است - مقدار ضریب تغییر داده شد و برخورد دو ذره شبیه‌سازی شد. سپس برای هر ضریب، مقدار خطای شبیه‌سازی محاسبه شد. این روند محاسبات برای هر دو مدل نیروی برخورد خطی و هرتز- میندلین انجام شد. پس از تعیین ضریبی از زمان تماس که در آن خطای شبیه‌سازی برابر با ۵ درصد است، مقدار گام زمانی مورد نیاز جهت شبیه‌سازی در هر دو مدل نیروی برخورد، محاسبه گردید. سپس روند تغییر گام زمانی شبیه‌سازی نسبت به تغییرات سرعت و شعاع ذرات، مورد مطالعه قرار گرفت.

جهت بررسی دقیق دو مدل نیروی برخورد و حذف عوامل اخلاص‌گر در شبیه‌سازی، فرض گردید که دو ذره در راستای خط گذرنده از مرکز این دو ذره، با سرعت ثابت به یکدیگر نزدیک می‌شوند و سرعت زاویه‌ای ذرات، صفر در نظر گرفته شد.

۳- ارائه یافته‌ها و تحلیل نتایج

جهت بررسی میزان خطای شبیه‌سازی نسبت به تغییر ضریب زمان تماس، شبیه‌سازی‌هایی انجام شد و این روند تغییرات برای هر دو مدل نیروی برخورد خطی و هرتز- میندلین محاسبه گردید. نتایج این بررسی برای هر دو مدل نیروی برخورد خطی و هرتز- میندلین به ترتیب در شکل ۳ و ۴ نشان داده شده است.

ضریب استرداد آنان مؤثر است. لذا قبل از انجام شبیه‌سازی، باید ضریب استرداد ذراتی که قرار است حرکت آنان شبیه‌سازی شود را در محیط آزمایشگاهی و با استفاده از دوربین سرعت بالا، به دست آورد. سپس از این ضریب، در محاسبات راگ استفاده نمود.

بهترین ترکیب مدل نیروی برخورد و گام زمانی، در شرایطی حاصل می‌شود که بعد از شبیه‌سازی برخورد ذرات، سرعت بازگشت ذرات، به سرعت بازگشت ذرات در محیط آزمایشگاهی نزدیک باشد. این کار با مقایسه‌ی ضریب استرداد محاسبه‌شده پس از شبیه‌سازی (نسبت سرعت ذرات بعد از برخورد به سرعت ذرات قبل از برخورد) و ضریب استرداد به‌دست‌آمده در آزمایشگاه که در ابتدای شبیه‌سازی به عنوان اطلاعات ورودی در نظر گرفته شده است، انجام می‌شود. شایان ذکر است که ضریب استرداد به‌دست‌آمده از آزمایشگاه که در ابتدای شبیه‌سازی به عنوان اطلاعات ورودی در نظر گرفته شد، مستقیماً در محاسبه‌ی موقعیت و سرعت ذرات نقش ندارد. در این پژوهش پارامتر α (رابطه‌ی ۲۰) جهت مشخص کردن خطای هر شبیه‌سازی پیشنهاد گردید.

$$\alpha = \left| \frac{\xi - \xi_{sim}}{\xi} \right| \times 100 \quad (20)$$

رابطه‌ی ۲۰ در واقع بیان‌کننده‌ی خطای نسبی شبیه‌سازی است. هر چه ضریب استرداد محاسبه‌شده از شبیه‌سازی به مقدار آزمایشگاهی نزدیک‌تر باشد، خطای شبیه‌سازی کاهش می‌یابد.

۲-۲- زمان تماس و گام زمانی شبیه‌سازی

در قسمت ۱-۲ عنوان گردید که برای تعیین زمان تماس ذرات (Δt)، در هر مدل نیروی برخورد، روابطی ارائه شده است. این روابط از پارامترهای شبیه‌سازی، نظیر شعاع (R)، سرعت (V) و پارامترهای مکانیکی ذرات نظیر مدول الاستیسیته (E) و نسبت پواسون (ν)، جهت تعیین زمان تماس دو ذره استفاده می‌کند. بنابراین در شبیه‌سازی با راگ، تنها پارامتری که در افزایش یا کاهش خطای شبیه‌سازی تأثیر دارد، مقدار عددی ضریبی ($C_{\Delta t}$) است که با ضرب کردن در زمان تماس، گام زمانی شبیه‌سازی (Δt) تعیین می‌شود. به عبارت دیگر این ضریب نشان می‌دهد که زمان تماس به چند قسمت تقسیم‌شده که به هر قسمت،

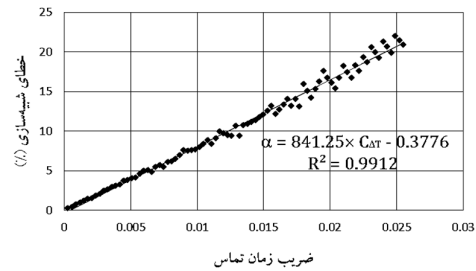
زمان تماس [۴۵] در نظر گرفته می‌شود) به صورت تحلیلی ارائه شود.

۳-۱- مقایسه‌ی گام زمانی به‌دست آمده از مدل‌های نیروی برخورد خطی و هرتز- میندلین

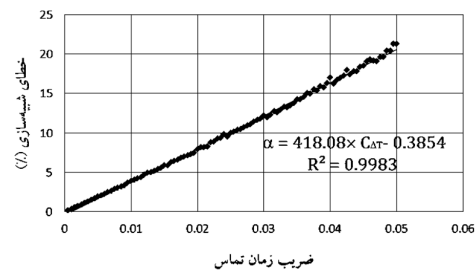
از آنجایی که حداقل بودن زمان انجام محاسبات شبیه‌سازی از اهمیت بالایی برخوردار است، سعی بر آن است که گام زمانی شبیه‌سازی تا حد ممکن با حفظ دقت لازم، افزایش یابد تا بتوان مدت زمان مورد نظری که قرار است شبیه‌سازی شود، با تعداد گام کمتری انجام شود. به‌عنوان مثال اگر قرار است ۱ ثانیه از حرکت ذرات شبیه‌سازی شود و گام زمانی برابر یک میکروثانیه باشد، آنگاه باید برای این شبیه‌سازی یک ثانیه‌ای یک میلیون مرحله محاسبات انجام شود، حال اگر گام زمانی به جای یک میکروثانیه برابر یک میلی ثانیه باشد، آنگاه می‌توان تنها با هزار مرحله محاسبات به هدف مورد نظر دست یافت. برای مقایسه‌ی بازه‌های زمانی به‌دست آمده از این دو مدل نیروی برخورد، شبیه‌سازی‌هایی با خطای ۵٪ در شعاع‌ها و سرعت‌های مختلف برای هر مدل انجام گردید. در این مقایسه، سرعت ذرات بین ۰/۵ تا ۱۰ متر بر ثانیه تغییر داده شد. این سرعت‌ها در واقع بیانگر حداقل و حداکثر سرعتی است که ذرات در آسیا می‌توانند داشته باشند.

گاهی در شبیه‌سازی‌ها برای افزایش زمان تماس و در نتیجه، کاهش زمان شبیه‌سازی، به صورت مجازی، کلیه‌ی ذرات و همچنین اندازه‌ی تجهیزات را چندین برابر اندازه‌ی واقعی در نظر می‌گیرند. اگر بزرگ مقیاس کردن برای همه‌ی اجزا و تجهیزات به یک اندازه اعمال گردد، تأثیری در نحوه‌ی حرکت ذرات نخواهد داشت. بنابراین در این پژوهش علاوه بر اندازه‌ی واقعی ذرات (شعاع‌های بین ۳ تا ۱۰ سانتی‌متر) اندازه‌ی بزرگ مقیاس شده ذرات (شعاع‌های بین ۲۰ سانتی‌متر تا ۱ متر) نیز بکار گرفته شد و تأثیر آن بر گام زمانی شبیه‌سازی بررسی گردید. سایر پارامترهای مورد استفاده در شبیه‌سازی در جدول ۱ آمده است.

نتایج شبیه‌سازی با استفاده از مدل خطی و مدل هرتز- میندلین به ترتیب در شکل ۵ و ۶ آمده است. همان‌طور که در شکل‌های ۵ و ۶ نشان داده شده است، گام زمانی به‌دست آمده از مدل هرتز- میندلین در شرایط مساوی، چندین برابر گام زمانی به‌دست آمده از مدل خطی است. با



شکل ۳: تغییرات خطای شبیه‌سازی نسبت به ضریب زمان تماس در مدل خطی



شکل ۴: تغییرات خطای شبیه‌سازی نسبت به ضریب زمان تماس در مدل هرتز- میندلین

با توجه به شکل‌های ۳ و ۴، همان‌طور که انتظار می‌رفت با افزایش ضریب زمان تماس، خطای شبیه‌سازی افزایش پیدا کرد. با برازش منحنی بر نتایج شبیه‌سازی، برای هر یک از مدل‌ها، روابطی به دست آمد که میزان خطای شبیه‌سازی را بر حسب ضرایب در نظر گرفته شده برای زمان تماس، نشان می‌دهد. سپس این روابط، بر اساس رابطه‌ی ۲۱، به روابط تعیین زمان تماس اضافه گردید. در نتیجه روابط جدیدی (۲۲ و ۲۳) به دست آمد که با استفاده از آنان می‌توان مستقیماً گام زمانی شبیه‌سازی را برای مدل‌های نیروی برخورد خطی و هرتز- میندلین و با در نظر داشتن خطای شبیه‌سازی محاسبه کرد.

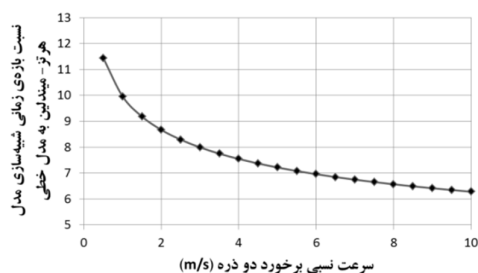
$$\Delta t = C_{\Delta T} \times \Delta T \quad (21)$$

$$\Delta t = \frac{\pi R \sqrt{\frac{\rho}{G}} (0.3776 + \alpha)}{(0.1631\nu + 0.8766) 841.25} \quad (22)$$

$$\Delta t = \sqrt[5]{\frac{25\gamma m^2}{64V_{rel}}} \times \frac{(0.3854 + \alpha)}{142.049} \quad (23)$$

این امر سبب شد تا تعیین مقدار گام زمانی شبیه‌سازی از حالت تجربی (معمولاً بین یک- پانزدهم تا یک- سی‌ام

نسبت گام (بازه) زمانی موردنیاز جهت شبیه‌سازی با استفاده از مدل هرتز-میندلین و مدل خطی در شکل ۷ نشان داده شده است. گام زمانی موردنیاز جهت به‌کارگیری مدل هرتز-میندلین در مقایسه با مدل خطی، بسته به سرعت نسبی برخورد، بین ۶ تا ۱۲ برابر، بزرگ‌تر است. این بدین معناست که به‌کارگیری مدل هرتز-میندلین، در شرایط یکسان، زمان لازم برای انجام محاسبات را کمتر می‌کند. به‌عنوان مثال، برای ذراتی به شعاع ۵ سانتی‌متر با سرعت نسبی برخورد ۵ متر بر ثانیه، گام زمانی مورد برای شبیه‌سازی با استفاده از مدل هرتز-میندلین، در خطای ثابت، ۷/۲ برابر بیشتر از به‌کارگیری مدل خطی است.



شکل ۷: نسبت گام زمانی شبیه‌سازی به‌دست‌آمده از مدل هرتز-میندلین به مدل خطی در سرعت‌های مختلف

۳-۲- تأثیر مدول الاستیسیته بر زمان انجام محاسبات

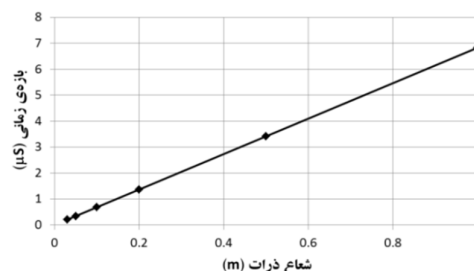
مدول الاستیسیته و نسبت پواسون از جمله خصوصیات است که در شبیه‌سازی با راگ برای ذرات در نظر گرفته می‌شود. سایر پارامترها از جمله مدول برشی و سختی برخورد با استفاده از این دو پارامتر قابل محاسبه هستند.

شبیه‌سازی‌ها نشان داده‌اند که هرچه مدول الاستیسیته در نظر گرفته شده در ابتدای شبیه‌سازی کوچک‌تر باشد، زمان برخورد دو ذره بزرگ‌تر می‌شود. بنابراین می‌توان با انتخاب مقادیر کوچک‌تر مدول الاستیسیته گام زمانی شبیه‌سازی را افزایش داد. شایان ذکر است که پژوهش‌های انجام‌شده که در آن‌ها نتایج شبیه‌سازی با راگ و نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده، نشان داده‌اند که در نظر گرفتن مدول الاستیسیته‌ی کوچک‌تر در دقت نتایج تأییری ندارند [۴۱]. بدین منظور با تغییر مقدار مدول الاستیسیته از ۲۱۰ گیگاپاسکال به ۲/۱ مگاپاسکال، شبیه‌سازی‌هایی برای هر دو مدل انجام گردید. در اکثر شبیه‌سازی‌ها مقدار مدول الاستیسیته، بیش از ده هزار برابر کمتر از مقدار واقعی

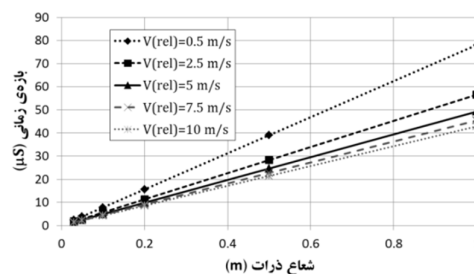
بررسی شکل‌های ۵ و ۶ مشاهده می‌شود که تأثیر شعاع ذرات بر گام زمانی لازم جهت شبیه‌سازی، بیش از سرعت نسبی برخورد ذرات است. این امر اهمیت بزرگ مقیاس کردن اندازه‌ی ذرات، جهت کاهش زمان لازم برای محاسبات را نشان می‌دهد. بنابراین، اگر در محاسبات راگ به جای استفاده از شعاع واقعی ذرات، شعاع چند برابری آن وارد شبیه‌سازی شود، می‌توان گام زمانی را افزایش داد. به‌طور مثال اگر به جای شبیه‌سازی گلوله‌هایی به شعاع ۵ سانتی‌متر گلوله‌هایی به شعاع یک متر شبیه‌سازی شوند، می‌توان گام زمانی موردنیاز را ۲۰ برابر بزرگ‌تر در نظر گرفت. یکی از تفاوت‌های گام زمانی به‌دست‌آمده از دو مدل نیروی برخورد، وابسته بودن زمان تماس به سرعت در مدل نیروی برخورد هرتز-میندلین است.

جدول ۱: پارامترهای مورد استفاده در شبیه‌سازی

مقدار	پارامتر
۰/۳	نسبت پواسون (ν)
۸۰۰۰	دانسیته ذرات (ρ) ($\frac{kg}{m^3}$)
۲۱۰	مدول الاستیسیته (E) (GPa)
۰/۷۵	ضریب استرداد (ζ)



شکل ۵: رابطه‌ی گام زمانی شبیه‌سازی و شعاع ذرات در مدل خطی



شکل ۶: رابطه‌ی گام زمانی شبیه‌سازی و سرعت نسبی برخورد و شعاع ذرات در مدل هرتز-میندلین

Δx : میزان همپوشانی	α : خطای شبیه‌سازی
V : سرعت ذرات	اندیس‌ها
Δt : گام زمانی	t : مولفه‌ی مماسی
ΔT : زمان تماس	n : مولفه‌ی عمودی
$C_{\Delta T}$: ضریب زمان تماس	rel: نسبی
p : دانسیته ذرات	*: موثر
G : مدول برشی	a : ذره‌ی اول
g : شتاب گرانش	b : ذره‌ی دوم
a : شتاب ذرات	after: قبل از برخورد
R : شعاع ذرات	before: بعد از برخورد
N : مرحله‌ی برخورد	Sim: شبیه‌سازی

۷- مراجع

- [1] P. W. Cleary, and M. Sinnott, "Analysis of Stirred Mill Performance Using DEM Simulation: Part 2 – Coherent Flow Structures, Liner Stress and Wear, Mixing and Transport," Minerals Engineering, vol. 19, p. 1551–1572, 2006.
- [2] M. Sinnott, and P. W. Cleary, "Analysis of Stirred Mill Performance Using DEM Simulation: Part 1 – Media Motion, Energy Consumption and Collisional Environment," Minerals Engineering, vol. 19, p. 1537–1550, 2006.
- [3] P. W. Cleary, "Ball Motion, Axial Segregation and Power Consumption in a Full Scale Two Chamber Cement Mill," Minerals Engineering, vol. 22, p. 809–820, 2009.
- [4] R. D. Morrison, and P. W. Cleary, "Using DEM to Compare the Energy Efficiency of Pilot Scale Ball and Tower Mills," Minerals Engineering, vol. 22, p. 665–672, 2009.
- [5] M. S. Powell, N. S. Weerasekara, S. Cole, R. D. LaRoche, and J. Favier, "DEM Modelling of Liner Evolution and its Influence on Grinding Rate in Ball Mills," Minerals Engineering, vol. 24, p. 341–351, 2011.
- [6] C. Pérez-Alonso, J. A. Delgado, "Experimental Validation of 2D DEM Code by Digital Image Analysis in Tumbling Mills," Minerals Engineering, vol. 25, p. 20–27, 2012.
- [7] P. A. Cundall, "A Discrete Numerical Model for Granular Assemblies," Geotechnique, vol. 29, p. 47–65, 1979.
- [8] P. Gy, "Sampling of Particulate Materials: Theory and Practice," Elsevier, 1979.
- [9] F. D. A. DiRenzo, "Comparison of contact-force models for the simulation of collisions in dem-based granular flow codes.," Chemical Engineering Science, vol. 59, p. 16, 2004.

مدول الاستیسیته‌ی ذرات، در گرفته می‌شود [۴۶]. نتایج شبیه‌سازی نشان داد که گام زمانی به‌دست‌آمده از دو مدل خطی و هرتز- میندلین، در خطای ثابت، با تغییر مقدار مدول الاستیسیته، به ترتیب ۳۱۶ و ۱۰۰ برابر افزایش پیدا می‌کند.

۴- نتیجه‌گیری

- با اضافه کردن پارامتر خطا به توابع تعیین زمان تماس در دو مدل نیروی برخورد خطی و هرتز- میندلین، روابط جدیدی ارائه شد که با استفاده از آن‌ها می‌توان گام زمانی شبیه‌سازی را با دقت موردنظر، جهت شبیه‌سازی تعیین کرد.
- با انجام شبیه‌سازی‌هایی در شرایط فیزیکی برابر و خطای شبیه‌سازی یکسان، با استفاده از دو مدل خطی و هرتز- میندلین مشخص گردید که گام زمانی لازم جهت شبیه‌سازی با مدل هرتز- میندلین، بسته به سرعت برخورد ذرات می‌تواند بین ۶ تا ۱۲ برابر بیشتر از مدل خطی باشد.
- با شبیه‌سازی ذراتی به شعاع یک متر، به جای ذراتی با شعاع ۵ سانتی‌متر، می‌توان گام زمانی شبیه‌سازی را در هر دو مدل خطی و هرتز- میندلین، ۲۰ برابر بزرگ‌تر در نظر گرفت.
- با کاهش مدول الاستیسیته، گام زمانی موردنیاز جهت شبیه‌سازی در مدل هرتز- میندلین، ۱۰۰ برابر و در مدل خطی، ۳۱۶ برابر گردید.

۵- تشکر و قدردانی

بدین وسیله از دکتر محسن یحیایی و دکتر غلامعباس پارساپور و مهندس سعید گل‌نژاد که در انجام این پژوهش ما را یاری نمودند، تشکر و قدردانی به عمل می‌آید.

۶- فهرست علائم

F : نیروی برخورد	m : جرم ذرات
K : تابع سختی برخورد	γ : ثابت میرایی در جهت
C : تابع میرایی برخورد	عمودی
E : مدول الاستیسیته	ζ : ضریب استرداد
X : موقعیت ذرات	v : نسبت پواسون

- Medium Cyclone," *Minerals Engineering*, vol. 33, p. 34-45, 2012.
- [26] K. W. Chu, and B. Wang, "CFD-DEM Modelling of Multiphase Flow in Dense Medium Cyclones," *Powder Technology*, vol. 193, pp. 235-247, 2009.
- [27] K. w. Chu, and B. Wang, "CFD-DEM Study of the Effect of Particle Density Distribution on the Multiphase Flow and Performance of Dense Medium Cyclone," *Minerals Engineering*, vol. 22, p. 893-909, 2009.
- [28] K. W. Chu, and B. Wang, "Particle Scale Modelling of the Multiphase Flow in a Dense Medium Cyclone: Effect of Vortex Finder Outlet Pressure," *Minerals Engineering*, vol. 31, pp. 46-58, 2012.
- [29] K. J. Dong, and S. B. Kuang, "Numerical Simulation of the In-Line Pressure Jig Unit in Coal Preparation," *Minerals Engineering*, vol. 23, pp. 301-312, 2010.
- [30] B. K. Mishra, and S. P. Mehrotra, "Modelling of Particle Stratification in Jigs by the Discrete Element Method," *Minerals Engineering*, vol. 11, p. 511-522, 1998.
- [31] P. W. Cleary, and G. K. Robinson, "Evaluation of Cross-Stream Sample Cutters Using Three-Dimensional Discrete Element Modelling," *Chemical Engineering Science*, vol. 63, p. 2980-2993, 2008.
- [32] P. W. Cleary, and G. K. Robinson, "Analysis of Vezin Sampler Performance," *Chemical Engineering Science*, vol. 66, p. 2385-2397, 2011.
- [33] G. K. Robinson, and P. W. Cleary, "The Conditions for Sampling of Particulate Materials to be Unbiased -- Investigation Using Granular Flow Modelling," *Minerals Engineering*, vol. 12, p. 1101-1118, 1999.
- [34] R. Balevicius, and R. Kacianauskas, "Analysis and DEM Simulation of Granular Material Flow Patterns in Hopper Models," *Advanced Powder Technology*, vol. 22, p. 226-235, 2011.
- [35] P. J. Owen, and P. W. Cleary, "Prediction of Screw Conveyor Performance Using the Discrete Element Method (DEM)," *Powder Technology*, vol. 193, p. 274-288, 2009.
- [36] H. P. Zhu, and A. B. Yu, "Numerical Investigation of Steady and Unsteady State Hopper Flows," *Powder Technology*, vol. 170, p. 125-134, 2006.
- [37] N. Djordjevic, F. N. Shi, and R. D. Morrison, "Applying Discrete Element Modelling to Vertical and Horizontal Shaft Impact Crushers," *Minerals Engineering*, vol. 16, p. 983-991, 2003.
- [38] A. Refahi, J. Aghazadeh Mohandesi, and B. Rezaei, "Discrete Element Modeling for Predicting Breakage Behavior and Fracture Energy of a Single Particle in a Jaw Crusher," *International journal of Mineral Processing*, vol. 94, p. 83-91, 2010.
- [10] I. C. Group. "Online Manual of PFC3D Particle Flow Code in Three Dimensions."
- [11] O. R. Walton, "Numerical Simulation of Inelastic, Frictional Particle Interaction," *Particulate Two-Phase Flow*, M. C. Roco, ed., p. 884, 1992.
- [12] D. Solutions, *EDEM 2.4 User Guide*, 2011.
- [13] M. A. R. Valle, "Numerical Modeling of Granular in Rotary Kilns," *Delft University of Technology*, 2012.
- [14] B. K. Mishra and R. K. Rajamani, "The Discrete Element Method for the Simulation of Ball Mills," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 16, p. 598-604, 1991.
- [15] P. W. Cleary, "Predicting Charge Motion, Power Draw, Segregation and Wear in Ball Mills Using Discrete Element Methods," *Minerals Engineering*, vol. 11, p. 1061-108, 1998.
- [16] N. Djordjevic, R. Morrison, and B. Loveday, "Modelling Comminution Patterns Within a Pilot Scale AG/SAG Mill," *Minerals Engineering*, vol. 19, p. 1505-1516, 2006.
- [17] H. Dong, and M. H. Moys, "Measurement of Impact Behaviour between Balls and Walls in Grinding Mills," *Minerals Engineering*, vol. 16, p. 543-550, 2003.
- [18] R. D. Morrison, and P. W. Cleary, "Using DEM to Model Ore Breakage within a Pilot Scale SAG Mill," *Minerals Engineering*, vol. 17, p. 1117-1124, 2004.
- [19] M. Rezaeizadeh, M. Fooladi, M. S. Powell, and S. H. Mansouri, "Experimental Observations of Lifter Parameters and Mill Operation on Power Draw and Liner Impact Loading," *Minerals Engineering*, vol. 23, p. 1182-1191, 2010.
- [20] M. Rezaeizadeh, M. Fooladi, M. S. Powell, S. H. Mansouri, and N. S. Weerasekara, "A New Predictive Model of Lifter Bar Wear in Mills," *Minerals Engineering*, vol. 23, no. 15, p. 1174-1181, 2010.
- [21] P. W. Cleary, and M. D. Sinnott, "Separation Performance of Double Deck Banana Screens – Part 2: Quantitative Predictions," *Minerals Engineering*, vol. 22, p. 1230-1244, 2009.
- [22] P. W. Cleary, and M. D. Sinnott, "Separation Performance of Double Deck Banana Screens – Part 1: Flow and Separation for Different Accelerations," *Minerals Engineering*, vol. 22, p. 1218-1229, 2009.
- [23] G. W. Delaney, and P. Cleary, "Testing the Validity of the Spherical DEM Simulating Real Granular Screening Processes," *Chemical Engineering Science*, vol. 68, p. 215-226, 2012.
- [24] J. Chen, and K. W. Chu, "Prediction of the Performance of Dense Medium Cyclones in Coal Preparation," *Minerals Engineering*, vol. 31, p. 59-70, 2012.
- [25] K. W. Chu, and S. B. Kuang, "Particle Scale Modelling of the Multiphase Flow in a Dense

- [39] P. Cleary, "Discrete element modeling of industrial granular flow applications," Task vol. 2, p. 385-416, 1998.
- [40] H. P. Zhu, "A theoretical analysis of the force models in discrete element method," Powder Technology, vol. 161, p. 122-129, 2006.
- [41] Ö. Ardiç, "Analysis of Bearing Capacity Using Discrete Element Method," Civil Engineering, Middle East Technical University, 2006.
- [42] S. V. Baars, "Discrete Element Analysis of Granular Materials," Civil Engineering and Geosciences, University of Technology Delft, 1996.
- [43] K. L. Johnson, "Contact Mechanics," Cambridge University Press, 1985.
- [44] R. J. Tuley, "Modeling Dry Powder Inhaler Operation with the Discrete Element Method," Imperial College London, 2007.
- [45] C. T. Jayasundara, R.Y. Yang "Effects of Disc Rotation Speed and Media Loading on Particle Flow and Grinding Performance in a Horizontal Stirred Mill," International Journal of Mineral Processing, vol. 96, p. 27-35, 2010.