

## حل تحلیلی توابع گرین برای معادلات محیط پوروالاستیک

ابوالفضل عبدالهی پور<sup>۱\*</sup>، محمد فاتحی مرجی<sup>۲</sup>، علیرضا یاراحمدی بافقی<sup>۳</sup>، جواد غلام نژاد<sup>۴</sup>

۱- دانشجوی دکتری مهندسی معدن، دانشکده مهندسی معدن و متالورژی، دانشگاه یزد

۲- دانشیار، دانشکده مهندسی معدن و متالورژی، دانشگاه یزد

۳- استادیار، دانشکده مهندسی معدن و متالورژی، دانشگاه یزد

۴- دانشیار، دانشکده مهندسی معدن و متالورژی، دانشگاه یزد

(دریافت: اسفند ۱۳۹۳، پذیرش: تیر ۱۳۹۴)

### چکیده

در حالت عادی سنگ در زیر سطح زمین دارای منافذ و ناپیوستگی‌ها معمولاً از یک یا چند نوع فاز سیال (آب، هوا، نفت و غیره) اشباع هستند. وجود این سیالات اثرات زیادی بر رفتار مکانیکی توده سنگ دارد. از جمله این آثار نزدیک شدن حالت تنش به سطح گسیختگی و تأثیر فشار منفذی بر تغییر شکل سنگ است. برای در نظر گرفتن این اثرات نیاز است که پاسخ محیط سنگی در چارچوب فضای متخلخل الاستیک بررسی شود. بدین منظور باید از تئوری پوروالاستیسیته استفاده نمود. در محیط پوروالاستیک معادلات حاکم و روابط تنش- کرنش و کرنش-جابجایی به دلیل وجود فشار منفذی و وابستگی میزان جابجایی‌ها و فشار منفذی به یکدیگر تغییر می‌کند. در این مقاله پس از ارائه معادلات اساسی و روابط لازم جهت بررسی رفتار و پاسخ سنگ در محیط پوروالاستیک با استفاده از یکی از روش‌های پتانسیل، وابستگی میدان جابجایی و فشار منفذی از بین می‌رود. سپس معادلات دیفرانسیل مستقل و وابسته به زمان حاصل برای یک نیرو و منبع سیال نقطه‌ای حل و توابع گرین آن به دست می‌آید. توابع گرین حاصل می‌توانند در ادامه به سادگی در یکی از روش‌های عددی مانند المان مرزی جهت بررسی پاسخ محیط سنگی به اثرات پوروالاستیک بکار روند.

### کلمات کلیدی

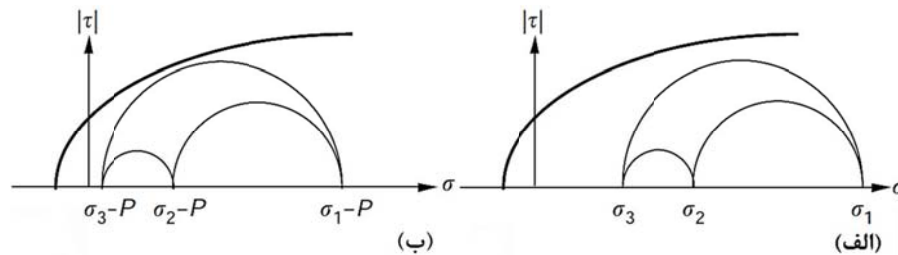
پوروالاستیسیته، تابع گرین، معادلات اساسی، فشار منفذی

\* عهده دار مکاتبات: a.abdollahipour@yahoo.com

## ۱- مقدمه

تغییر شکل الاستیک سنگ وابسته به فشار منفذی سیال و فشار منفذی سیال نیز وابسته به تغییر شکل الاستیک سنگ است (کوپل تغییر شکل های الاستیک و فشار منفذی سیال). سیال منفذی در صورت وجود گرادیان در فشار منفذی در درون منافذ و حفرات سنگ به جریان در می آید. اما حرکت سیال همچنین می تواند به دلیل تغییرات تنشی ناشی از دلایل طبیعی مانند نیروهای تکتونیکی و حفاری گمانه و غیره نیز به وجود آید. بنابراین رفتار مکانیک و هیدرولوژیکی سنگ کاملاً به یکدیگر وابسته است.

سنگ در اعماق زمین به صورت طبیعی دارای ترک و حفرات اشباع از یک یا چند نوع فاز سیال (آب، هوا، نفت و غیره) است. این سیالات موجود در حفرات اثرات زیادی بر رفتار مکانیکی توده سنگ دارند. ساده ترین اثر این سیالات در تأثیر فشار منفذی بر نزدیک شدن حالت تنش به سطح گسیختگی روی می دهد (شکل ۱). همچنین فشار منفذی منجر به تغییر شکل الاستیک در سنگ می گردد. در نتیجه



شکل ۱: الف) حالت تنش زیر منحنی گسیختگی ب) اعمال فشار منفذی و نزدیک شدن حالت تنش "مؤثر" به منحنی گسیختگی

در نهایت با حل معادلات پاسخ سیستم در محیط پوروالاستیک به دست می آید.

## ۲- معادلات حاکم در محیط پوروالاستیک

تئوری پوروالاستیسیته ایزوتروپیک خطی ابتدا توسط بایو [۱۲] برای مدلسازی پاسخ جامدات اشباع از سیال ارائه و سپس توسط دیگر محققین توسعه داده شد [۱۳-۱۵]. در پوروالاستیسیته سنگ شامل دو قسمت جامد و سیال فرض می شود که در مقیاس میکروسکوپی از یکدیگر جدا ولی در مقیاس میکروسکوپی با هم وجود دارند [۱۶]. در ادامه همانند فرمولاسیون اولیه بایو، متغیرهای دینامیکی پایه، تنش کل  $\sigma_{ij}$  و فشار منفذی  $p$  در نظر گرفته می شوند. مقادیر کوپل مربوطه، کرنش جامد  $e_{ij} = (u_{ij} + u_{ji})/2$  (قابل مشتق گیری از بردار جابجایی  $u_i$ ) و تغییرات حجم سیال بر واحد حجم مرجع است. برای ایجاد یک سیستم ریاضی جهت تعریف تنش، فشار منفذی، شار و جابجایی در محیط پوروالاستیک معادلاتی بر اساس اصول بقای مومنتوم و جرم باید در نظر گرفته شود. این معادلات به همراه قوانین اساسی (Constitutive laws)، معادلات حاکم بر تئوری پوروالاستیسیته را تشکیل می دهند. سپس این معادلات

اکثر تحلیل های مکانیک سنگی و مسائل جریان زیرسطحی این کوپل را نادیده می گیرند. بخصوص بخش بزرگی از پروژه های جریان زیرسطحی در هیدرولوژی، مهندسی نفت، یا ژئوفیزیک با این فرض که سنگ متخلخل اما صلب است انجام می شود. به طور مشابه بسیاری از تحلیل های مکانیک سنگی یا سیال منفذی را نادیده می گیرند و یا فرض می کنند که فشارهای منفذی را می توان مستقل از تغییر شکل مکانیکی در نظر گرفت. اگرچه چنین فرضیاتی معمولاً قابل قبول است اما شرایط زیادی نیز وجود دارد که کوپل میان تغییر شکل و فشار سیال منفذی و جریان سیال باید مورد توجه قرار گیرد. بسیاری از مسائل در ژئومکانیک مانند تحکیم خاک [۱]، تغییر شکل اطراف یک چاه گمانه [۲]، فرآیند شکست هیدرولیکی [۳-۱۰] و پایدارسازی گسل های فعال [۱۱] تحت تأثیر رفتار تغییر شکل-نفوذ (Diffusion-deformation) هستند و بنابراین بهتر است توسط تئوری پوروالاستیسیته تحلیل شوند.

در ادامه معادلات حاکم بر فضای پوروالاستیک ارائه می گردد. سپس با استفاده از یک روش تجزیه متغیرها دو قسمت وابسته و مستقل از زمان از یکدیگر جدا می شود.

است. همچنین  $\gamma$  نرخ تزریق سیال از منبع سیال و  $\alpha$  ضریب بایو تنش مؤثر است که برابر است با [۱۷]:

$$\alpha = \frac{3(v_u - \nu)}{B(1-2\nu)(1+v_u)} \quad (۶)$$

از ترکیب معادلات (۱) تا (۶) معادلات میدانی بر اساس  $u_i$  و  $\zeta$  به دست می‌آیند. از ترکیب معادلات (۱) تا (۳) معادله الاستیسیته با جمله کوپل سیال حاصل می‌شود.

$$GV^2 u_i + \frac{G}{1-2\nu} e_{,i} - \frac{2GB(1+v_u)}{3(1-2\nu)} \zeta_{,i} = -F_i \quad (۷)$$

از ترکیب معادلات (۲)، (۴) و (۵) و با استفاده از معادله (۷) معادله نفوذ به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - c \nabla^2 \zeta = \frac{kB(1+v_u)}{3(1-\nu)} F_{i,i} - k f_{i,i} + \gamma \quad (۸)$$

که در آن  $c$  ضریب تعمیم یافته تحکیم است و به صورت زیر بیان می‌شود [۱۴]:

$$c = \frac{2kB^2G(1-\nu)(1+v_u)^2}{9(1-\nu)(v_u-\nu)} \quad (۹)$$

نیروی حجمی و جملات منبع در معادلات میدانی بالا را می‌توان برای معرفی تکنیکی‌های میدانی مانند نیرو و منبع نقطه‌ای و غیره (مانند حل کلویین) در حل این معادلات استفاده نمود.

### ۳- روش حل

همان‌طور که اشاره شد در پوروالاستیسیته میان تغییر شکل جامد و فشار منفذی سیال وابستگی دو طرفه (کوپل) قوی برقرار است. به دلیل پیچیدگی معادلات حاکم پوروالاستیک معمولاً دستیابی به حل فرم بسته مسائل مقدار مرزی و شرایط مرزی به‌جز برای موارد با هندسه ساده مشکل است. با این وجود چندین روش سیستماتیک برای حل تحلیلی ارائه شده است. در ادامه با استفاده از روش پتانسیل‌ها (Method of potentials) سعی می‌شود تا جملات پوروالاستیک بر مبنای چند پتانسیل خاص بیان شوند.

### ۳-۱- تجزیه بایو

بایو (Biot) روش تجزیه زیر را که اجازه جدا کردن معادلات میدانی (۷) و (۸) را می‌دهد ارائه داد [۱۸]:

$$u_i = u_i^0 + \Delta u_i = u_i^0 + \frac{B(1+v_u)}{3(1-\nu)} \Phi_{,i} \quad (۱۰)$$

توسط جایگذاری و حذف بعضی متغیرها، سیستمی مناسب برای حل تحلیلی مسئله ایجاد می‌کنند.

یک مجموعه پنج پارامتری سازگار برای بیان معادلات در محیط ایزوتروپیک شامل: مدول برشی  $G$ ، ضرایب پوآسون زهکشی شده  $\nu = (3K-2G)/(2(3K+G))$  و  $\nu_u = (3Ku-2G)/(2(3Ku+G))$  مدول حجمی زهکشی شده و  $K_u$  مدول حجمی زهکشی نشده)، ضریب فشار منفذی اسکمپتون  $B$  (نسبت فشار منفذی القائی به تغییرات فشار محصور کننده تحت شرایط زهکشی نشده) و ضریب نفوذپذیری  $K$  (که می‌توان آن را به صورت  $k/\mu$  نشان داد، که در آن  $k$  نفوذپذیری ذاتی و  $\mu$  ویسکوزیته دینامیکی سیال است) است [۱۴].

معادلات حاکم بر پوروالاستیسیته خطی ایزوتروپیک به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۲، ۱۴]:

$$\sigma_{ij} = 2Ge_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} e - \alpha \delta_{ij} p \quad (۱)$$

$$p = -\frac{2GB(1+v_u)}{3(1-2\nu)} e + \frac{2GB^2(1-2\nu)(1+v_u)^2}{9(v_u-\nu)(1-2\nu)} \zeta \quad (۲)$$

معادله تعادل تنش محلی در حالت استاتیکی:

$$\sigma_{ij,j} = -F_i \quad (۳)$$

جریان سیال در فضای متخلخل با قانون دارسی که رابطه‌ای تجربی برای جریان نشت در محیط متخلخل تغییر شکل ناپذیر است بیان می‌شود. این رابطه از معادلات ناوی-استوکس نیز با حذف جملات مربوط به اینرسی به دست می‌آید که با فرض تغییر شکل کوچک و نادیده گرفتن اثر تغییر چگالی سیال (پتانسیل هوبرت) سازگار است.

$$q_i = -\kappa(p_{,i} - f_i) \quad (۴)$$

با در نظر گرفتن قانون بقای جرم برای سیال تراکم پذیر، معادله زیر برای پیوستگی سیال به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + q_{i,i} = \gamma \quad (۵)$$

که در معادلات بالا  $e = e_{ii}$  اتساع جامد،  $F_i = \rho g_i$  نیروی حجمی کل (Bulk body force) (جامد و سیال)،  $g_i$  مؤلفه گرانش در راستای  $i$ ،  $\zeta$  تغییرات آب محتوا است همچنین  $\rho = (1-n)\rho_s + \rho_f n$  چگالی حجمی و  $\rho_s$  و  $\rho_f$  به ترتیب چگالی قسمت جامد و سیال و  $n$  تخلخل هستند،  $q_i$  بردار دبی ویژه،  $f_i = \rho_f g_i$  نیروی حجمی سیال

$$GV^2u_i^0 + \frac{G}{1-2\nu_u}e_{,i}^0 = -F_i \quad (11)$$

از معادله (۷) می توان اثبات نمود که پتانسیل  $\Phi$  به صورت تساوی زیر تعریف می شود:

$$\zeta = \nabla^2 \Phi \quad (12)$$

جایگزینی معادله بالا در معادله (۸) و حذف یک لاپلاس از طرفین منجر به معادله نفوذ برای تابع پتانسیل  $\Phi$  می شود.

$$\frac{\partial \nabla^2 \Phi}{\partial t} - c \nabla^4 \Phi = \frac{kB(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} F_{i,i} - kf_{i,i} + \gamma \quad (13)$$

$$\rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial t} - c \nabla^2 \Phi = g_1 + g_2 + g_3 + \psi_1$$

که در آن

$$\nabla^2 g_1 = \frac{kB(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} F_{i,i}, \nabla^2 g_2 = -kf_{i,i}, \nabla^2 g_3 = \gamma, \nabla^2 \psi_1 = 0 \quad (14)$$

گاهی راحت تر است که در معادله (۱۳) سمت راست به شکل زیر نوشته شود [۱۵]:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - c \nabla^2 \Phi = -\frac{3c(1-\nu_u)(\nu_u - \nu)}{B(1-\nu_u)(1-2\nu_u)(1+\nu_u)} e^0 + g_2 + g_3 + \psi_1 \quad (15)$$

معادله تکینه‌ی غیر کوپل (مستقل از زمان و وابسته به زمان) کاهش می یابد. در نهایت حل کامل پوروالاستیک از مجموع قسمت های زهکشی شده و زهکشی نشده حاصل می گردد.

#### ۴- توابع گرین برای محیط پوروالاستیک

حل اساسی معادلات دیفرانسیل نهایی حاصل به نام تابع گرین شناخته شده است. این حل اساسی تابع وزن یا تأثیر در فرمولاسیون المان مرزی است. برای یک نیروی نقطه ای که به صورت آنی در راستای  $z$  اعمال می شود جمله  $F_{ij} = -2\pi\delta_{ij}\delta(\bar{x}, \bar{x}')\delta(t, t')$  به سمت راست معادله (۱۱) افزوده می شود. بدیهی است که قسمت زهکشی نشده (مستقل از زمان) توسط حل کلونین به دست می آید.

میدان جابجایی به دو قسمت زهکشی نشده  $u_i^0$  که معادله الاستیسیته با ضرایب زهکشی نشده را ارضا می کند و قسمت بدون چرخش  $\Phi$  که توسط معادله نفوذ کنترل می گردد تقسیم می شود. این روش از تجزیه برای حل عمومی معادلات مقدار مرزی مناسب نیست چراکه شرایط مرزی غیر کوپل حالا با متغیرهای جدید (شرایط مرزی تعریف شده) کوپل می شود. اما این مشکل برای حل تابع گرین وجود ندارد زیرا شرایط مرزی وجود ندارد تا ایجاد کوپل جدید نماید (توابع گرین در محیط نامحدود حل می شوند) [۱۵]. این روش تجزیه متغیرها با موفقیت برای به دست آوردن چندین تابع گرین در پوروالاستیسیته استفاده شده است [۱، ۱۹]. روش حل به صورت خلاصه در ادامه بیان می شود.

اولین قسمت میدان جابجایی  $(u_i^0)$ ، معادله ناوی الاستیسیته را با ضریب پوآسون زهکشی نشده به صورت زیر ارضا می کند:

کامل بودن حل بالا توسط بایو ثابت شده است [۲۰].

در معادله بالا نیروی حجمی  $F_i$  با استفاده از دیورژانس معادله (۱۱) حذف شده است.

همان طور که گفته شد اگرچه معادلات حاکم (۱۱) و (۱۳) (به جز جمله نیروی حجمی) کاملاً جدا از هم به نظر می رسند اما در حقیقت کوپل در شرایط مرزی بر اساس متغیرهای جدید همچنان وجود دارد. بنابراین قسمت زهکشی نشده  $u_i^0$  در کل وابسته به زمان است و نمی تواند مستقل از متغیر  $\Phi$  حل شود [۱۹]. با این وجود برای مسائل با دامنه نامحدود (مانند حل تابع گرین) محدودیت بالا صدق نمی کند. قسمت زهکشی نشده دیگر تحت شرایط مرزی گذرا (Transient boundary conditions) نیست و مستقل از زمان است. وابستگی به زمان به طور کامل در قسمت غیر چرخشی جذب شده است. توابع هارمونیک  $\psi_1$  و  $\psi_2$  را می توان حذف نمود. بنابراین مسئله یافتن حل های اساسی برای محیط پوروالاستیک به یافتن پاسخ خاص دو

$$u_{ij}^0 = \frac{1}{4G(1-\nu_u)} \delta(t, t') \times \left[ -(3-4\nu_u) \delta_{ij} \ln r + r_{,i} r_{,j} \right] \quad (16)$$

$$v_j^* = -\frac{kB(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} \frac{1}{r^2} \times \left[ n_j \left( 1 - e^{-\xi^2} \right) - 2r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \left( 1 - e^{-\xi^2} - \xi^2 e^{-\xi^2} \right) \right] \quad (22)$$

که در آن  $v_i = \int_0^t q_i dt$  بردار جابجایی نسبی سیال است.

برای توابع گرین مورد نیاز برای اتساع آبی سیال از  $Q$  حجم سیال تزریقی برابر با  $Q = 2\pi\delta(\bar{x}, \bar{x}')\delta(t, t')$  و  $F_i = f_i = \psi = 0$  در معادلات (۱۱) و (۱۳) استفاده می‌شود. معادله (۱۱) حل بدیهی  $u_i^0 = 0$  را می‌دهد و معادله (۱۳) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - c\nabla^2 \Phi = \ln r \frac{\partial \delta(t, t')}{\partial t} \quad (23)$$

مشابه روش بکار رفته در پیوست، معادله (۲۳) نیز با تبدیل لاپلاس حل می‌شود:

$$\Phi_j = \delta(t, t') \ln r + 2c \frac{1}{r^2} \xi^2 e^{-\xi^2} \quad (24)$$

و توابع گرین جابجایی، تنش، فشار منفذی و جابجایی سیال با مشتق‌گیری از معادله (۲۴) به دست می‌آید:

$$u_i^* = \frac{B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} \left[ \delta(t, t') \frac{r_{,i}}{r} - 4c \frac{r_{,i}}{r^3} \xi^4 e^{-\xi^2} \right] \quad (25)$$

$$T_{ij}^* = \frac{2GB(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} \delta(t, t') \frac{1}{r^2} \left[ n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial n} \right] + \frac{8GBc(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} \frac{1}{r^4} \xi^4 e^{-\xi^2} \left[ n_i (1-2\xi^2) + 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial n} \xi^2 \right] \quad (26)$$

$$p^* = -\frac{8c^2}{k} \frac{1}{r^4} \xi^4 e^{-\xi^2} (1-2\xi^2) \quad (27)$$

$$v^* = -\delta(t, t') \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} + 4c \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial n} \xi^4 e^{-\xi^2} \quad (28)$$

توابع گرین بالا می‌توانند به صورت کامل نیاز معادلات انتگرالی در روش المان مرزی مستقیم را برآورده کنند. اما اگر هدف کاربرد مستقیم انتگرال‌های وابسته به زمان به روش حرکت در زمان (*time marching*) باشد باید توابع گرین برای استفاده در معادلات انتگرالی دارای تغییرات آب محتوا نیز ارائه گردند. بنابراین توابع گرین با قرار دادن محتوای  $g_1 = g_3 = \psi = 0$  و  $g_2 = 2\pi k \delta(\bar{x}, \bar{x}') \delta(t, t')$  در معادله (۱۳) به دست می‌آیند:

با قرار دادن نیروهای حجمی در سمت راست معادله (۱۱) و فرض  $f_i = \gamma = \psi = 0$  به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial t} - c\nabla^2 \Phi_j = \frac{kB(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} \delta(t, t') \frac{r_{,j}}{r} \quad (17)$$

حل معادله (۱۷) با استفاده از تبدیل لاپلاس انجام می‌شود (در پیوست به صورت کامل آمده است) و برابر است با:

$$\Phi_j = \frac{kB(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} \frac{r_{,j}}{r} \left( 1 - e^{-\xi^2} \right) \quad (18)$$

که  $\xi = r/2\sqrt{c(t-t')}$  همان‌طور که اشاره شد معادله (۱۶) جابجایی مستقل از زمان و با استفاده از معادله (۱۸) جابجایی وابسته به زمان تولید شد. از قرار دادن معادلات (۱۶) و (۱۸) در (۱۰) میدان جابجایی بارگذاری نقطه‌ای (تابع گرین جابجایی) به دست می‌آید.

$$u_{ij}^* = \frac{1}{4G(1-\nu_u)} \delta(t, t') \times \left[ -(3-4\nu_u) \delta_{ij} \ln r + r_{,i} r_{,j} \right] + \frac{c(\nu_u - \nu)}{2G(1-\nu_u)(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \times \left[ \delta_{ij} \left( 1 - e^{-\xi^2} \right) - 2r_{,i} r_{,j} \left( 1 - e^{-\xi^2} - \xi^2 e^{-\xi^2} \right) \right] \quad (19)$$

توابع گرین دیگر برای تنش، فشار منفذی و جابجایی سیال از روابط اساسی (constitutive equations) به دست می‌آید.

$$T_{ij}^* = \frac{1}{2(1-\nu_u)} \delta(t, t') \frac{1}{r^2} \left[ (1-2\nu_u) \left( n_i r_{,j} - n_j r_{,i} - \delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} \right) - 2r_{,i} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \right] - \frac{c(\nu_u - \nu)}{(1-\nu_u)(1-\nu)} \frac{1}{r^3} \times \left[ \left( \delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,i} n_j + r_{,j} n_i - 4r_{,i} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \right) \right] \quad (20)$$

که در آن  $n$  بردار نرمال به سمت خارج مرز ناحیه مورد نظر است.

$$p_j^* = \frac{B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} \delta(t, t') \frac{r_{,j}}{r} - \frac{4Bc(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} \frac{1}{r^3} \xi^4 e^{-\xi^2} \quad (21)$$

زیادی از انتگرال گیری در بعد زمانی نیاز دارد و مقدار زیادی داده مرزی از گام های زمانی قبلی باید ذخیره گردد. به جای این کار می توان از یک الگوریتم پیشروی زمانی مرحله ای استفاده نمود که در آن زمان گذشته به عنوان زمان اولیه استفاده می شود. میدان در آن زمان در کل نامتعادل است. مرز درونی دامنه باید تقسیم شود، و انتگرال حجم گرفته شود. در نتیجه باید محتوای سیال در گره های داخلی ارزیابی شود. اگرچه محدوده انتگرال گیری زمانی در این حالت کمتر از حالت قبل است، ولی به دلیل طبیعت بسیار متغیر تابع گرین انتگرال گیری عددی هنوز طولانی است. برای حل این مشکل می توان از انتگرال گیری تحلیلی استفاده نمود [۲۲]. این کار یک تابع هسته جدید ایجاد می کند که وابسته به اندازه گام زمانی است و نه خود زمان. که منجر به کارایی بهتر روش عددی می گردد [۲۳].

#### ۶- نتیجه گیری

حل اساسی توابع گرین مورد نیاز برای استفاده در روش المان مرزی ارائه شد. برای حل این معادلات از روش تجزیه جابجایی ها به دو قسمت مستقل و وابسته به زمان ارائه شده توسط بایو استفاده شد. این کار منجر به تشکیل دو دسته از توابع گرین مستقل و وابسته به زمان گردید. به منظور به دست آوردن پاسخ نهایی سیستم پوروالاستیک کافی است در انتها حل های حاصل در دو قسمت مستقل و وابسته به زمان باهم جمع گردید. در ادامه به صورت خلاصه نحوه کاربرد این حل ها در روش المان مرزی شرح داده شد. حل ها در روش المان مرزی منجر به پیدایش معادلات انتگرالی دوگانه (که توابع انتگرال ده آن ها یکبار نسبت به مکان و یکبار نسبت به زمان انتگرال گیری می شود) شد. برای بالا بردن دقت روش می توان انتگرال مکانی را به صورت تحلیل محاسبه نمود و انتگرال زمانی را که حل آن مشکل تر است به صورت عددی انتگرال گیری کرد.

#### ۷- پیوست

معادله (۱۷) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial t} - c \nabla^2 \Phi_j = \frac{kB(1+v_u)}{3(1-v_u)} \delta(t, t') (\ln r)_j \quad (1)$$

$$\Phi = 2k \frac{1}{r^2} \xi^2 e^{-\xi^2} \quad (29)$$

در نتیجه توابع گرین نیز برابر خواهند بود با:

$$u_i^{\oplus} = -\frac{4Bk(1+v_u)}{3(1-v_u)} \frac{r_{,i}}{r^3} \xi^4 e^{-\xi^2} \quad (30)$$

$$T_i^{\oplus} = \frac{8kGB(1+v_u)}{3(1-v_u)} \frac{1}{r^4} \xi^4 e^{-\xi^2} \times \quad (31)$$

$$\left[ n_i (1 - 2\xi^2) + 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial n} \xi^2 \right] p^{\oplus} = -2\pi \delta(\bar{x}, \bar{x}') \delta(t, t') - 8c \frac{1}{r^4} \xi^4 e^{-\xi^2} (1 - 2\xi^2) \quad (32)$$

$$v^{\oplus} = 4k \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial n} \xi^4 e^{-\xi^2} \quad (33)$$

#### ۵- بحث

توابع گرین محاسبه شده می توانند با استفاده از روش المان مرزی برای حل مسائل مقدار مرزی یا اولیه بکار روند. توابع گرین همچنین به همراه استفاده از قضیه پیچش (Convolution) می توانند پاسخ یک سیستم معادلات دیفرانسیل به هر بارگذاری دیگر را نیز ایجاد کنند. برای استفاده از این توابع در روش المان مرزی، میدان مرزی ابتدا به چندین زیرالمان مرزی تقسیم می شود. متغیرهای میدانی و هندسی با چند جمله ای های تکه ای درون یابی می شوند. سپس معادلات به صورت عددی انتگرال گیری می گردند تا یک حل خطی شامل متغیرهای گسسته در فضا تولید شود. معادلات انتگرالی حاضر نیز قسمت زمانی دارند و باید انتگرال زمانی حل شود. معمولاً در المان مرزی رفتار وابسته به زمان به دو شکل برخورد می شود یکی استفاده از روش های تبدیل (لاپلاس و فوریه) و دیگری پیشروی مستقیم در زمان (Time-marching) است.

انتگرال های وابسته به زمان تولید شده در معادلات انتگرالی المان مرزی از لحظه بارگذاری تا زمانی که پاسخ یافت شود انتگرال گیری می شوند [۲۱]. اگر میدان پاسخ در تعادل اولیه باشد (هیچ گرادیان فشار منفذی اولیه ای وجود نداشته باشد) می توان از انتگرال های حجم در معادلات انتگرالی المان مرزی اجتناب نمود. مشکل این روش این است که برای به دست آوردن حل در یک زمان مشخص باید انتگرال را تا زمان اولیه دنبال کنیم. این کار به حجم

Int J Rock Mech Min Sci Geomech Abstr;26:499–506.

[5] Rahman MK, Joarder AH. (2006). Investigating production-induced stress change at fracture tips: Implications for a novel hydraulic fracturing technique. J Pet Sci Eng;51:185–96.

[6] Vandamme L, Detournay E, Cheng AH-D. (1989). A two-dimensional poroelastic displacement discontinuity method for hydraulic fracture simulation. Int J Numer Anal Methods Geomech;13:215–24.

[7] Song I, Suh M, Sik Won K, Haimson B. (2001). A laboratory study of hydraulic fracturing breakdown pressure in table- rock sandstone. Geosci J;5:263–71.

[8] Ghassemi a., Zhou XX, Rawal C. (2013). A three-dimensional poroelastic analysis of rock failure around a hydraulic fracture. J Pet Sci Eng 2013;108:118–27. doi:10.1016/j.petrol.06.005.

[9] Lu YL, Elsworth D, Wang LG. (2013). Microcrack-based coupled damage and flow modeling of fracturing evolution in permeable brittle rocks. Comput Geotech;49:226–44.

[10] Detournay E, Cheng AH-D, Roegiers J-CC, McLennan JD. (1989). Poroelasticity Considerations in In Situ Stress Determination by Hydraulic Fracturing. Int J Rock Mech Min Sci Geomech Abstr;26:507–13.

[11] Rudnicki JW, Hsu T-C. (1988). Pore pressure changes induced by slip on permeable and impermeable faults. J Geophys Res;93:3275–85.

[12] Biot MA. (1941). General theory of three-dimensional consolidation. J Appl Phys;12:155–64.

[13] Verruijt A. (1969). Elastic storage in aquifers. Flow Through Porous Media, New York: Academic Press; p. 331–76.

[14] Rice JR, Cleary MP. (1976). Some basic stress diffusion solutions for fluid saturated elastic porous media with compressible constituents. Rev Geophys Sp Phys;14:227–41.

[15] Detournay E, Cheng AHD. (1993). Fundamentals of Poroelasticity. In: Fairhurst C, editor. Compr. Rock Eng. Princ. Pract. Proj. Vol. II, Anal. Des. Method, Pergamon Press; p. 113–71.

[16] Fjar E, Holt R, Raaen A, Risnes R, Horsrud P. (2008). Petroleum related rock mechanics..

[17] Biot MA, Willis DG. (1957). The elastic coefficients of the theory of consolidation. J Appl Mech;24:594–601.

[18] Biot MA. (1955). Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. J Appl Phys;26:182–5.

[19] Detournay E, Cheng A. (1987). Poroelastic solution of a plane strain point displacement discontinuity. J Appl Mech;54.

[20] Biot MA. (1956). General Solutions of the Equations of Elasticity and Consolidation for a Porous Material. ASME J Appl Mech;78:91–6.

با استفاده از تبدیل لاپلاس این معادله به صورت زیر

تغییر می‌کند:

$$s\varphi_j - c\nabla^2\varphi_j = \frac{kB(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)}e^{-st'}(\ln r)_{,j} \quad (2)$$

که در آن s پارامتر تبدیل لاپلاس و  $\varphi$  تبدیل لاپلاس تابع پتانسیل  $\Phi$  است. یک حل معادله (2) می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\varphi_j = \frac{kB(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)}e^{-st'}(\ln r + K_0(\eta)) \quad (3)$$

که در آن  $\eta = r\sqrt{s/c}$  و  $K_0$  تابع اصلاح شده بسل از نوع دوم و درجه صفر است. از معکوس این تبدیل پاسخ معادله (1) به دست می‌آید:

$$\Phi_j = \frac{kB(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)}(\ln r + E_1(\xi^2)/2)_{,j} \quad (4)$$

که در آن  $\xi = r/2\sqrt{c(t-t')}$  و  $E_1$  انتگرال نمایی است که برابر است با:

$$E_1(z) = \int_z^\infty \frac{e^{-z}}{z} dz \quad (5)$$

با استفاده از خاصیت بازگشتی مشتقات انتگرال نمایی که به صورت معادله زیر است و اینکه  $E_0(z) = e^{-z}/z$  [22] مشتق لازم به دست می‌آید:

$$E_n(z)' = -E_{n-1}(z) \quad (6)$$

در نهایت پاسخ نهایی معادله (1) پیوست به صورت زیر خواهد بود:

$$\Phi_j = \frac{kB(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} \frac{r_{,j}}{r} (1 - e^{-\xi^2}) \quad (7)$$

## ۸- مراجع

[1] Cheng AH-D, Liggett JA. (1984). Boundary integral equation method for linear poroelasticity with application to soil consolidation. Int J Numer Meth Engng;20:255–78.

[2] Detournay E, Cheng AH-D. (1988). Poroelastic response of a borehole in a nonhydrostatic stress field. Int J Rock Mech;171–82.

[3] Detournay E, Cheng A. (1991). Plane strain analysis of a stationary hydraulic fracture in a poroelastic medium. Int J Solids Struct.

[4] Schmitt DR, Zoback MD. (1989). Poroelastic effects in the determination of the maximum horizontal principal stress in hydraulic fracturing tests—A proposed breakdown equation employing a modified effective stress relation for tensile failure.

- [21] Liggett JA, Liu PLF. (1979). Unsteady flow in confined aquifer: a comparison of two boundary integral methods. *Water Resour Res*;15:861-6.
- [22] Abramowitz M, Stegun IA. (1972). *Handbook of mathematical functions*. Dover, New York.
- [23] Taigbenu AK, Liggett JA. (1985). Boundary element calculations of diffusion equation. *J Eng Mech*;111:311-28.



## Analytical Solution of Green's Functions for a Poroelastic Medium

A. Abdollahipour<sup>1\*</sup>, M. Fatehi Marji<sup>2</sup>, A. Yarahmadi Bafghi<sup>3</sup>, J. Gholamnejad<sup>4</sup>

1- PhD Student of Mining, Dept. of Mining and Metallurgy, Yazd University, Iran

2- Associate Professor, Dept. of Mining and Metallurgy, Yazd University, Iran

3- Assistant Professor, Dept. of Mining and Metallurgy, Yazd University, Iran

4- Associate Professor, Dept. of Mining and Metallurgy, Yazd University, Iran

\* Corresponding Author: [a.abdollahipour@yahoo.com](mailto:a.abdollahipour@yahoo.com)

(Received: February 2015, Accepted: June 2015)

### Abstract

Subsurface rocks (by their nature) are filled with cracks and pores which are saturated with one or more fluid phases (water, air, oil, etc.). These fluids have a significant influence on the mechanical behavior of a rock mass. Closing the state of the stress to failure surface and pore pressure effect on the rock deformation are among these influences of pore fluids. To account for these effects, one should investigate the rock mass response in an elastic medium with porosity. Therefore, poroelastic theory should be used. In poroelastic medium the governing equations, stress-strain and strain-displacement relations are affected by pore pressure and reciprocal effects of displacements and pore pressure. In this paper, firstly the constitutive equations and other required relations for describing a poroelastic medium are presented. Then the coupled effect of pore pressure and displacements is removed by using a potential method. Differential equations of time-dependent and time-independent are solved for a point force and point source which gives Green's functions. Resulted Green's functions can be used in any suitable numerical method such as boundary element method to investigate the response of rock mass to poroelastic effects.

### Keywords

Poroelasticity, Green's function, Constitutive equations, Pore pressure