

ارائه یک روش نوین تحلیلی-عددی جهت حل معادله موج کامل در مدلسازی لرزه‌ای بر مبنای روش‌های بسط سریع و لیپفراگ

فرزاد مرادپوری^{1*}، علی مرادزاده²، ری‌نام کروز پستانا³، مهرداد سلیمانی منفرد⁴

- 1- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود
 2- استاد، دانشکده‌ی مهندسی معدن، دانشگاه تهران، استاد همکار دانشکده مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود
 3- دانشیار، دانشکده فیزیک، گروه ژئوفیزیک و زمین‌شناسی، دانشگاه فدرال باهیا، برزیل
 4- استادیار، دانشکده مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

(دریافت: اردیبهشت 1394 پذیرش: اسفند 1394)

چکیده

در مدلسازی لرزه‌ای روش تفاضل محدود یک ابزار معروف و محبوب عددی برای گسسته‌سازی معادله موج است که در آن عملگر زمان توسط یک تقریب مرتبه دو و مشتقات مکانی توسط یک رویه مرتبه چهار تقریب زده می‌شوند. تقریب مشتق زمان به این صورت باعث ایجاد خطای عددی می‌شود که با انتخاب گام‌های زمانی کوچک می‌توان از آن جلوگیری کرد، این امر باعث افزایش زمان محاسبات نیز می‌شود. همچنین برای گسسته‌سازی زمانی از برخی روش‌های دیگر همانند روش‌های استورمر-فرلت، لیپفراگ و اخیراً روش ترکیبی بسط سریع-استورمر-فرلت استفاده شده است که در این مقاله مورد بحث، بررسی و مقایسه قرار گرفته است. هدف اصلی مقاله حاضر ارائه یک روش عددی جدید با استفاده از انتگرال‌گیری ترکیبی لیپفراگ و روش بسط سریع برای دستیابی به دقت و پایداری بالا به منظور حل عددی معادله موج برای مدلسازی و مهاجرت زمانی معکوس داده‌های لرزه‌ای است. با استفاده از روش بسط سریع و روش تبدیل فوریه برای مشتقات مکانی، می‌توان روش پیشنهادی مطالعه حاضر، یعنی روش ترکیبی بسط سریع-لیپفراگ، را به منظور انتشار میدان موج، حتی برای گام‌های زمانی بزرگتر نیز به کار برد. با روش پیشنهادی، پاسخ معادله موج و مشتق اول آن نسبت به زمان در هر گام زمانی مورد استفاده به دست می‌آید. روش ارائه شده نه تنها برای گام‌های زمانی کوچک، دارای دقت بسیار بالایی است، بلکه با افزایش گام زمانی به چندین برابر، دارای خطای به مراتب کمتری نسبت به سایر روش‌های ارائه شده از این دست همانند روش استورمر-فرلت، روش لیپفراگ و روش ترکیبی بسط سریع-استورمر-فرلت است.

واژگان کلیدی

روش‌های عددی، معادله موج کامل، میدان موج، انتگرال‌گیری ترکیبی، روش بسط سریع-لیپفراگ

ارجاع به این مقاله:

مرادپوری، ف.، مرادزاده، ع.، پستانا، ر. ک.، سلیمانی منفرد، م.، (1394)، ارائه یک روش نوین تحلیلی-عددی جهت حل معادله موج کامل در مدلسازی لرزه‌ای بر مبنای روش‌های بسط سریع و لیپفراگ، روش‌های تحلیلی و عددی در مهندسی معدن، 5(10)، 41-48.

1- مقدمه

جایگزین برای روش‌های تفاضل محدود و اجزاء محدود، می‌توان روش بسط سریع ارائه شده توسط کوزلوف و همکاران را برای نیل به یک انتگرال زمانی دقیق‌تر معادله موج مورد استفاده قرار داد [2]. در این روش از مفاهیم مشابه تحقیق ارائه شده توسط تال-اِذِر و همکاران که از چند جمله‌ای چبیشف در روش بسط سریع برای توسعه عملگر کسینوس بهره می‌برد، استفاده شده است [11]. همچنین تِسِمِر نشان داد که روش بسط سریع بسیار کارآمدتر از روش‌های تفاضل محدود است (مرتبه دو در زمان)، به ویژه اگر گام‌های زمانی بزرگ مورد استفاده قرار گیرد [12].

در روش‌های تفاضل محدود اولیه برای گسسته‌سازی زمانی، جلوگیری از خطاهای انباشته⁶ در شبیه‌سازی‌های کوتاه و بلند مدت عددی معادلات دیفرانسیل جزئی بسیار مشکل است. از طرف دیگر، الگوریتم‌های ترکیبی بواسطه ویژگی حفظ ساختار و شبیه‌سازی‌های بلند مدت معروف هستند. این خصوصیات جالب الگوریتم‌های ترکیبی باعث کارآمدی آنها در بزرگتر نمودن فواصل زمانی و مکانی کوچک می‌شود [13]. انتگرال‌های ترکیبی را می‌توان برای محاسبه پاسخ عددی معادله موج و مشتق اول زمانی آن مورد استفاده قرار داد. یکی دیگر از جنبه‌های جالب انتگرال‌گیری‌های ترکیبی در این است که میدان موج برآورد شده برای محاسبه مشتق میدان موج نسبت به زمان در همان گام زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در اینجا روش‌های ترکیبی استورمر-فرلت⁷ که مرتبه دو در زمان است و روش لیپفراگ⁸ ارائه شده توسط بونومی و همکاران (1998) که مرتبه چهار در زمان است، بحث می‌شود [14]. در ادامه بر اساس قابلیت‌های بالای روش بسط سریع که در بالا اشاره گردید و روش لیپفراگ و همچنین با تغییر شرایط مسئله و فرضیات در فرمول بندی مسئله، برای اولین بار فرمول جدیدی برای حل کامل معادله موج، برونمایی میدان موج و مشتق اول آن ارائه شده است. لازم به ذکر است که الگوریتم ارائه شده برای حل کامل معادله موج به نسبت سایر روش‌ها از دقت و پایداری بسیار بالاتری برای گام‌های زمانی کوچک و بزرگ برخوردار است.

2- حل معادله موج صوتی

پاسخ عددی معادله موج صوتی و الاستیک به طور معمول برای تولید داده‌های مصنوعی در مدلسازی لرزه‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد. این قبیل شبیه‌سازی‌ها همچنین اساس مهاجرت زمانی معکوس¹ هستند. روش *RTM* با حل معادله موج دو طرفه توسط روش‌های مختلف ریاضی اجرا شده است. در بین روش‌های صریح، روش‌های زیر برای حل معادله موج وجود دارند، روش تفاضل محدود که از بسط تیلور استفاده می‌کند [1]، روش بسط سریع² که از بسط چبیشف³ استفاده می‌کند [۳،۲]، و روش پیشروی صریح دو مرحله‌ای⁴ که از بسط چند جمله‌ای استفاده می‌کند [4]. انتگرال‌گیری‌های ترکیبی⁵ دسته دیگری از روش‌ها هستند که برای تولید مجموعه داده‌های مصنوعی مورد استفاده در روش *RTM* استفاده می‌شوند. علت استفاده انتگرال‌گیری ترکیبی افزایش دقت با کاهش فواصل نمونه برداری زمانی و همچنین کاهش زمان محاسبات است که در روش *RTM* بسیار با اهمیت است.

روش تفاضل محدود یک ابزار معروف و محبوب عددی برای گسسته‌سازی معادله موج است که در آن عملگر زمان توسط یک رویه مرتبه دو تقریب زده می‌شود، در حالی که مشتقات مکانی توسط یک رویه مرتبه چهار تقریب زده می‌شوند. تقریب مشتق زمان به این صورت باعث ایجاد خطای عددی می‌شود که منجر به تغییر شکل پالس و پراکندگی عددی می‌گردد که با انتخاب گام‌های زمانی کوچک می‌توان از آن جلوگیری کرد.

با وجود آنکه بهبود مشتقات زمانی راه حل ساده و روشنی ندارد، برخی محققین عملگرهای مشتق زمانی را بر مبنای محاسبه روش‌های تفاضل محدود مرتبه بالاتر ارائه کرده‌اند [۷،۶،۵،۴،۱]. همچنین روش اجزاء محدود برای حل معادلات موج مورد استفاده قرار می‌گیرد که با توجه به حجم بسیار بالای محاسباتی در مدلسازی لرزه‌ای بویژه مهاجرت زمانی معکوس کارایی چندانی ندارد [۸،۹]. بالداساری و همکاران (2009) از روش اجزاء محدود در مدلسازی لرزه‌ای به روش مهاجرت زمانی معکوس استفاده نمودند که از جمله معایب عمده آن می‌توان به مواجهه با دستگاه‌های معادلاتی عظیم با چندین میلیون درجه آزادی و حجم بسیار بالای محاسبات اشاره نمود [10]. به عنوان

$$\Delta t \leq 2 / \left(c_{\max} \pi \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z}\right)^2} \right) \quad (5)$$

به طوریکه c_{\max} سرعت بیشینه در شبکه و Δx و Δz فواصل شبکه هستند.

بونومی و همکاران (1998) نیز راه‌حلی را برای معادله (3) به نام راه‌حل لیپفرگ به صورت زیر ارائه کردند [14].

$$Q^{(n+\frac{1}{3})} = Q^{(n)} + \frac{1}{6} \Delta t c^2 \nabla^2 P^{(n)},$$

$$P^{(n+\frac{1}{2})} = P^{(n)} + \frac{1}{2} \Delta t Q^{(n+\frac{1}{3})},$$

$$Q^{(n+\frac{2}{3})} = Q^{(n+\frac{1}{3})} + \frac{2}{3} \Delta t c^2 \nabla^2 P^{(n+\frac{1}{2})}, \quad (6)$$

$$P^{(n+1)} = P^{(n+\frac{1}{2})} + \frac{1}{2} \Delta t Q^{(n+\frac{2}{3})},$$

$$Q^{(n+1)} = Q^{(n+\frac{2}{3})} + \frac{1}{6} \Delta t c^2 \nabla^2 P^{(n+1)}.$$

در این طرح، برای پیمایش میدان موج بصورت پایدار، حداکثر زمان نمونه‌برداری باید شرط زیر را ارضاء نماید.

$$\Delta t \leq \sqrt{6} / \left(c_{\max} \pi \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z}\right)^2} \right). \quad (7)$$

طرح لیپفرگ به خودی خود امکان بهبود دقت به مرتبه چهار را بدون افزایش حافظه مورد نیاز با استفاده از یک روش تفاضل محدود مرکزی¹⁰ فراهم آورده و برگشت‌پذیری زمانی¹¹ معادله موج را نیز حفظ می‌کند. این طرح همچنین بطور مستقیم مشتق زمانی میدان موج (Q) را به دست می‌دهد. تحلیل‌ها نشان می‌دهد که شرط پایداری طرح لیپفرگ اجازه انتخاب گام زمانی تا $1/22$ مرتبه بزرگتر از روش تفاضل‌های مرکزی برای انتگرال زمانی را می‌دهد [۱۳، ۱۶، ۱۷].

اگر مشتقات مکانی بوسیله روش تفاضل محدود مرتبه بالاتر یا روش فوریه در طرح‌های فوق‌الذکر (معادله 4 و 6) محاسبه شوند، فاصله زمانی Δt مورد استفاده توسط این روش‌ها برای گسسته‌سازی معادله 3 باید برای نیل به پایداری و جلوگیری از پراکندگی عددی به مقدار بسیار زیادی کوچک باشد.

برای حل این مشکل، یک روش عددی، برگرفته از پاسخ تحلیلی معادله 4، به صورت زیر پیشنهاد شده است [3].

یک سیستم همیلتونی⁹، دستگاهی از معادلات به شکل زیر است [15]:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (1)$$

که در آن x و p ، بترتیب بردارهای n بعدی یک مختصات تعمیم یافته (مختصات لاگرانژی) و اندازه حرکت هستند. t متغیر زمانی مستقل و $H = H(x, p)$ تابع همیلتونی است. مجموعه مکان و مختصات اندازه حرکت (x, p) مختصات متعارفی (استاندارد) نامیده می‌شود.

معادله موج صوتی چگالی ثابت برای یک محیط ناهمگن عبارتست از:

$$\frac{\partial^2 P(x, y, z, t)}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 P(x, y, z, t) \quad (2)$$

به طوری که $P = P(x, y, z, t)$ فشار میدان موج، $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ عملگر لاپلاسین و $c = c(x, y, z, t)$ سرعت انتشار موج در محیط است. معادله (2) را می‌توان با استفاده از فرمول همیلتون به صورت زیر نوشت [14]:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = Q, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = c^2 \nabla^2 P \quad (3)$$

معادله موج (3) امکان استفاده از خانواده روش‌های ترکیبی برای انتگرال‌گیری در زمان را فراهم می‌آورد. بر طبق نظر اسکال و همکاران (1997)، روش‌های ترکیبی شکل یکسان خاصی از دستگاه همیلتونی را با دقت قابل توجهی برای فواصل انتگرال‌گیری بزرگ حفظ می‌کنند، به طوری که برای برونیابی خطی با اندازه گام به اندازه کافی کوچک، پایدار هستند [13].

یوشیدا انتگرال‌گیرهای ترکیبی را برای حل معادله 1، ارائه کرد که برای معادله 3 نیز قابل استفاده است. یکی از این راه‌حل‌های ترکیبی روش استورمر-فرلت است [16]:

$$Q^{(n+\frac{1}{2})} = Q^{(n)} + \frac{1}{2} \Delta t c^2 \nabla^2 P^{(n)},$$

$$P^{(n+1)} = P^{(n)} + \Delta t Q^{(n+\frac{1}{2})}, \quad (4)$$

$$Q^{(n+1)} = Q^{(n+\frac{1}{2})} + \frac{1}{2} \Delta t c^2 \nabla^2 P^{(n+1)}$$

بیشینه گام زمانی مورد استفاده در این طرح باید شرط زیر را ارضاء نماید.

معادله دارای شکل ریاضیاتی یکسانی هستند. بنابراین استفاده از روش استورمر- فرلت در مورد معادله 14 منجر به معادله 15 می‌شود که روش ترکیبی بسط سریع- استورمر-فرلت¹² نامیده می‌شود [18].

$$P^{(n+1)} = \Delta t Q^{(n)} + \sum_{k=0}^M C_{2k} J_{2k}(\Delta t R) T_{2k} \left(\frac{iL}{R} \right) P^{(n)},$$

$$Q^{(n+1)} = Q^{(n)} - \frac{(P^{(n)} + P^{(n+1)})}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=0}^M C_{2k} J_{2k}(\Delta t R) T_{2k} \left(\frac{iL}{R} \right) [P^{(n)} + P^{(n+1)}]. \quad (15)$$

در این مطالعه برای اولین بار با استفاده از انتگرال گیر ترکیبی لیپفرگ و راه‌حل ارائه شده توسط بونومی و همکاران (1998) از تلفیق روش بسط سریع و روش لیپفرگ برای حل معادله 14، استفاده شده و معادله 16 توسط نگارندگان مقاله ارائه شده است. با توجه به موارد فوق روش جدید ارائه شده روش ترکیبی بسط سریع- لیپفرگ¹³ نامیده می‌شود.

$$P^{(n+1)} = P^{(n)} + (\Delta t) Q^{(n)} + \frac{1}{3} \left[\sum_{k=0}^M C_{2k} J_{2k}(\Delta t R) T_{2k} \left(\frac{iL}{R} \right) - 1 \right] P^{(n)},$$

$$Q^{(n+1)} = Q^{(n)} + \frac{1}{(\Delta t)} \left(\sum_{k=0}^M C_{2k} J_{2k}(\Delta t R) T_{2k} \left(\frac{iL}{R} \right) - 1 \right) \times \left(2P^{(n)} + \frac{1}{6} (P^{(n+1)} - 2P^{(n)} + P^{(n-1)}) \right). \quad (16)$$

طرح عددی معادله 15 و 16 از جهت استفاده از بسط چبیشف مشابه طرح 9 عمل می‌کند. فقط نیاز است تا بسط مرتبه دو برای اولین گام زمانی محاسبه شود. روش $L-REM$ میدان موج $P^{(n+1)}$ و مشتق میدان موج نسبت به زمان یعنی $Q^{(n+1)}$ را به دست می‌دهد. همچنین این روش از میدان موج محاسبه شده $P^{(n+1)}$ برای محاسبه $Q^{(n+1)}$ در همان گام زمانی نیز استفاده می‌کند که خود نکته قابل توجه و جالبی است. این ویژگی اجازه استفاده از مکانیسمی را خواهد داد که جهت انتشار میدان موج را معکوس می‌کند.

برای حل عددی دستگاه همیلتونی (معادله 15 و 16)، محاسبه عملگر لاپلاسیین نیاز است که برای این منظور از تبدیل‌های فوریه گسسته¹⁴ پیشرو و معکوس همانند معادله 17 استفاده می‌شود.

$$\nabla^2 P = \text{DFT}^{-1} \left[-\|\mathbf{k}\|^2 \text{DFT}(P) \right], \quad (17)$$

$$P(t + \Delta t) + P(t - \Delta t) = 2 \cos(L\Delta t) P(t), \quad (8)$$

$L^2 = -c^2 \nabla^2$ برای محاسبه $\cos(L\Delta t)$ ، باید عملگر L^2 را به طور صریح محاسبه و سپس از بسط چبیشف ارائه شده توسط کوزلوف و همکاران (1989) استفاده نمود [2]. بنابراین معادله 8 را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$P(t + \Delta t) + P(t - \Delta t) = 2 \sum_{k=0}^M C_{2k} J_{2k}(\Delta t R) T_{2k} \left(\frac{iL}{R} \right) P(t) \quad (9)$$

به طوری که $C_0 = 1$ و $C_k = 2$ برای $k \neq 0$. تغییرات پارامتر M بسته به نتیجه مطلوب مورد نظر و زمان محاسبات تعیین شده و می‌تواند هر مقداری در نظر گرفته شود. J_k معرف توابع بسل مرتبه k و T_k چندجمله‌ای اصلاح شده چبیشف هستند و مقدار R برای انتشار دو بُعدی موج به طور تقریبی از رابطه 10 به دست می‌آید.

$$R = c_{\max} \sqrt{(1/\Delta x)^2 + (1/\Delta z)^2}. \quad (10)$$

برای معرفی طرح ترکیبی، عبارت $-2P(t)$ به دو طرف معادله 9 اضافه شده و عبارت $1/(\Delta t)^2$ در هر دو طرف این معادله ضرب می‌شود، نتیجه به صورت زیر خواهد شد.

$$\frac{P^{(n+1)} - 2P^{(n)} + P^{(n-1)}}{(\Delta t)^2} = W(P^{(n)}) \quad (11)$$

به طوری که

$$\frac{P^{(n+1)} - 2P^{(n)} + P^{(n-1)}}{(\Delta t)^2} = W(P^{(n)}) = \frac{2}{(\Delta t)^2} \left[\sum_{k=0}^M C_{2k} J_{2k}(\Delta t R) T_{2k} \left(\frac{iL}{R} \right) - 1 \right] P^{(n)}. \quad (12)$$

باید توجه شود که عبارت سمت چپ معادله 11، تقریب تفاضل محدود مرتبه دو برای $\partial^2 P / \partial t^2$ و برابر $W(P^{(n)})$ است، بنابراین معادله 12 را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود [18].

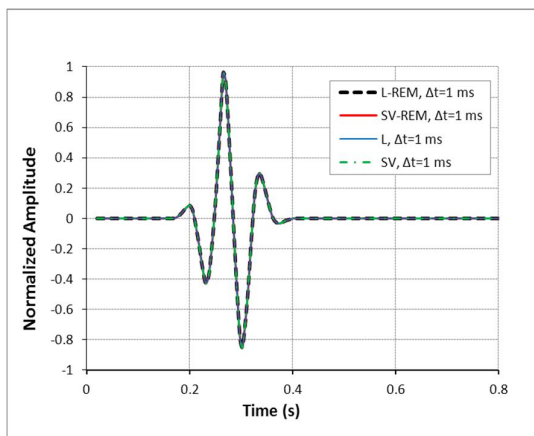
$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 P = W(P^{(n)}). \quad (13)$$

در این حالت، می‌توان فرمول‌نویسی همیلتونی برای معادله 13 را به شکل زیر معرفی کرد.

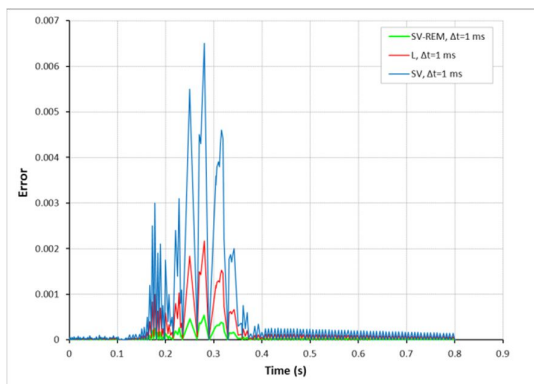
$$\frac{\partial P}{\partial t} = Q, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = c^2 \nabla^2 P = W(P^{(n)}). \quad (14)$$

بنابراین، همه روش‌های توسعه یافته برای حل معادله 3 را می‌توان برای حل معادله 14 نیز بکار گرفت، زیرا هر دو

لیپفراگ از مرتبه چهار است. همچنین با توجه به ترکیب روش بسط سریع با روش استورمر-فرلت، خطای این روش از هر دو روش استورمر-فرلت و لیپفراگ به میزان قابل توجهی پایین تر است.



شکل 1: مقایسه دامنه نرمال شده ردهای لرزه ای به دست آمده با طرح‌های روش بسط سریع - لیپفراگ ($L-REM$)، بسط سریع - استورمر - فرلت ($SV-REM$)، لیپفراگ (L) و استورمر - فرلت (SV) برای $\Delta t = 1 \text{ ms}$



شکل 2: مقایسه خطای مطلق برای دامنه ردهای لرزه ای نشان داده شده در شکل 1. رد لرزه ای نرمال شده روش بسط سریع - لیپفراگ ($L-REM$) به عنوان معیار در نظر گرفته شده است.

با افزایش فاصله نمونه برداری زمانی به $\Delta t = 1 \text{ ms}$ ، برای طرح‌های عددی 4، 6 و 15 و 16، نتایج به دست آمده هنوز هم در مقایسه با نتایج به دست آمده از روش بسط سریع - لیپفراگ برای $\Delta t = 1 \text{ ms}$ مناسب است. این امر به وضوح در شکل 3، نشان داده شده است. نسبت به خطای مطلق هر طرح، همانطور که در شکل 4، دیده می شود،

به طوری که $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ بردار دوبعدی عدد موج است.

با ترکیب روش بسط سریع با روش طیفی (روش فوریه) برای مشتقات مکانی و همچنین با روش ترکیبی برای انتگرال زمانی، دقیق ترین اجرای ممکن در زمان و مکان برای شبکه داده شده به دست می آید. اما در هر حال، در هنگام اجرای عددی نه تنها دقت، که زمان پردازش و حافظه مورد نیاز نیز موضوعات مهمی تلقی می شوند، که به این موضوع نیز پرداخته می شود.

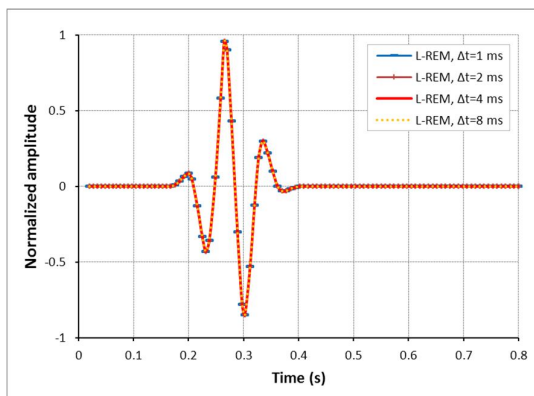
3- آنالیز عددی و تحلیل نتایج

در این قسمت، نتایج مطالعات صورت گرفته با استفاده از طرح های عددی در معادلات 4، 6، 15 و 16 نشان داده می شود. از طریق این نتایج، همچنین می توان دقت عددی و رفتار عددی خطای مربوط به طرح روش ارائه شده ترکیبی بسط سریع - لیپفراگ را برای نمونه های زمانی مختلف مطرح شده برای برونمایی میدان موج، مورد بررسی قرار داد. برای انجام این آزمون، از یک محیط با سرعت ثابت و موجک ریکر¹⁵ با حداکثر فرکانس 25 هرتز، تزییق شده در وسط مدل استفاده شده است.

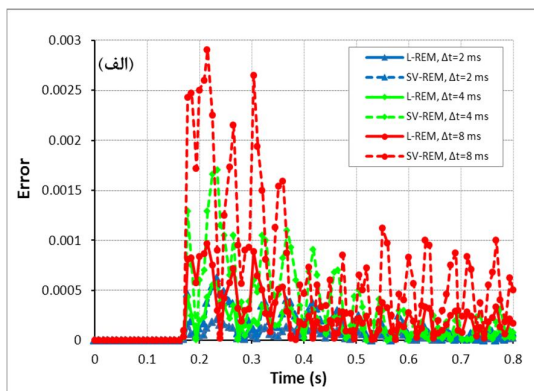
با توجه به اینکه برای یک نمونه برداری زمانی کوچک Δt ، پاسخ عددی به پاسخ تحلیلی همگرا خواهد بود. پاسخ حاصل از ترکیب روش بسط سریع و لیپفراگ برای $\Delta t = 1 \text{ ms}$ محاسبه و به عنوان پاسخ معیار¹⁶ مورد استفاده قرار می گیرد. سپس دامنه نرمال شده پاسخ های به دست آمده بعدی، برای نمونه های زمانی مختلف با پاسخ معیار در یک نقطه مشخص از حوزه محاسباتی مقایسه می شوند.

همانطور که در شکل 1، قابل مشاهده است، منحنی های دامنه نرمال شده محاسبه شده از طرح های عددی 4، 6، 15 و 16، زمانی که از فاصله زمانی $\Delta t = 1 \text{ ms}$ استفاده می شود، از هم قابل تمیز نیستند. همچنین از شکل 2، می توان دریافت که برای این نمونه برداری زمانی، دامنه خطا برای طرح های عددی 4، 6 و 15 خیلی کوچک هستند. همچنین هنوز می توان مشاهده نمود که خطای طرح استورمر-فرلت (SV) از طرح لیپفراگ (L) بزرگتر است. همانطور که انتظار می رفت، این نتایج دقت کمتر طرح استورمر - فرلت را نسبت به طرح لیپفراگ اثبات می کند، زیرا طرح استورمر - فرلت مرتبه دو در زمان و طرح

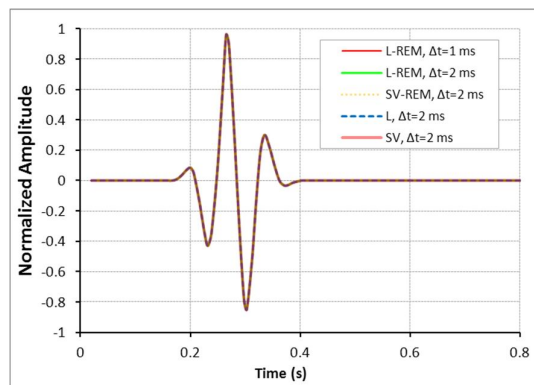
ای برای دو روش بسط سریع - لیپفراگ و روش بسط سریع - استورمر - فرلت در شکل‌های 6-الف، 6-ب، 6-ج و 6-د نشان داده شده است. با توجه به این شکل‌ها ملاحظه می‌شود که حداکثر خطای به دست آمده برای روش بسط سریع - لیپفراگ در $\Delta t = 8 \text{ ms}$ اتفاق می‌افتد که از نظر بزرگی $1/7$ مرتبه کمتر از خطای اتفاق افتاده برای روش بسط سریع - استورمر فرلت با $\Delta t = 4 \text{ ms}$ است. همچنین این خطا تقریباً $1/2$ مرتبه از خطای اتفاق افتاده برای روش لیپفراگ با $\Delta t = 1 \text{ ms}$ کمتر و از خطای روش استورمر - فرلت برای همین فاصله زمانی بیشتر از 6 مرتبه کمتر است. این نتایج نشان می‌دهد که طرح روش بسط سریع - لیپفراگ ارائه شده دارای یک دقت بسیار بالا، حتی برای نمونه‌برداری‌های زمانی بزرگتر است.



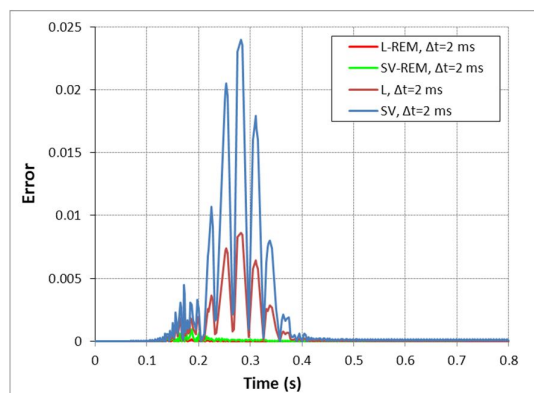
شکل 5: مقایسه دامنه نرمال شده ردهای لرزه‌ای به دست آمده با روش بسط سریع - لیپفراگ ($L-REM$) برای نمونه برداری زمانی $\Delta t = 1 \text{ ms}$ تا $\Delta t = 8 \text{ ms}$



خطای مطلق طرح روش بسط سریع - لیپفراگ نسبت به سایر طرح‌ها بسیار کمتر و نزدیک به صفر است.



شکل 3: مقایسه دامنه نرمال شده ردهای لرزه‌ای به دست آمده با طرح روش بسط سریع - لیپفراگ ($L-REM$) برای $\Delta t = 1 \text{ ms}$ و طرح‌های روش بسط سریع - لیپفراگ، بسط سریع - استورمر - فرلت ($SV-REM$)، لیپفراگ (L) و استورمر - فرلت (SV) برای $\Delta t = 2 \text{ ms}$



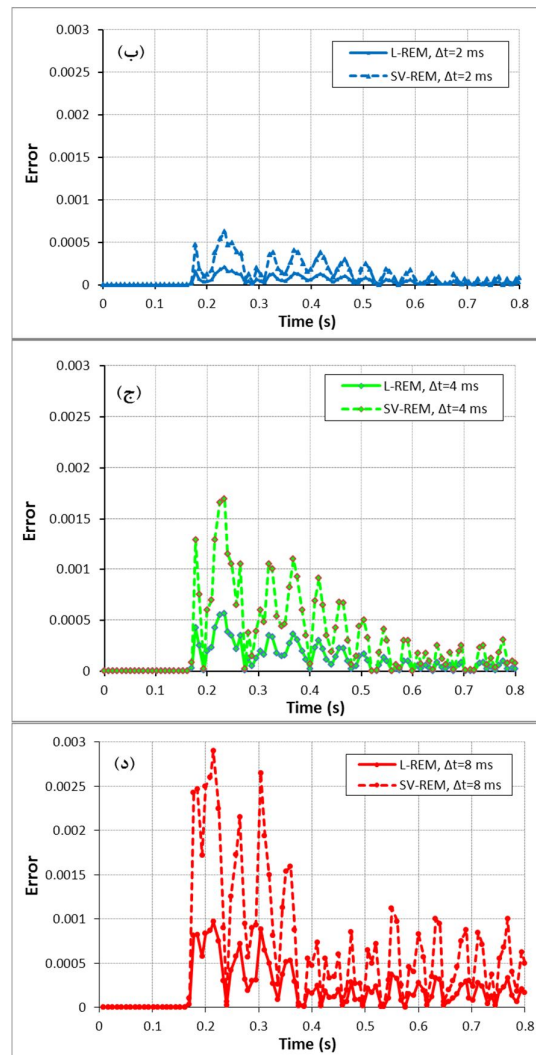
شکل 4: مقایسه خطای مطلق دامنه نرمال شده ردهای لرزه‌ای نشاده داده شده در شکل 3، برای $\Delta t = 2 \text{ ms}$ ، رد نرمال شده روش بسط سریع - لیپفراگ ($L-REM$) به عنوان معیار در نظر گرفته شده است.

علاوه بر این، نتایج بدست آمده از طرح روش بسط سریع - لیپفراگ برای گام‌های زمانی مختلف مقایسه شده است. همانطور که در شکل 5، دیده می‌شود، دامنه نرمال شده میدان موج محاسبه شده در یک مکان، یکسان و تقریباً از همدیگر غیر قابل تمیز هستند. همچنین خطای مطلق برای گام زمانی یکسان در شکل 6-الف نشان داده شده است. همچنین جهت مقایسه بهتر، خطای مربوط به هر کدام از فواصل نمونه‌برداری زمانی ۲،۴ و ۸ میلی ثانیه

پیش‌بینی شده توسط معیار همگرایی سری‌های روش بسط سریع، باعث محاسبه نتایج پایدار و دقیق برای گام‌های زمانی دلخواه می‌شود. اگر زمان‌های انتشار طولانی که به طور معمول در مورد کاربردهای صحرایی وجود دارد، مورد استفاده قرار گیرد، روش‌های معمول استورمر و لیپفراگ همان‌گونه که مورد بحث قرار گرفت، نیازمند تعداد زیادی از فواصل زمانی بسیار کوچک برای کاهش نوفه (نویز) پراکندگی عددی هستند. در همین راستا، پایداری و دقت استفاده از روش بسط سریع-لیپفراگ در مقایسه با آخرین روش ارائه شده از این دست یعنی روش بسط سریع-استورمر - فرلت مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. این روش محدود به دامنه خاصی از نمونه برداری‌های زمانی نبوده و هیچ‌گونه مشکلی در رابطه با پراکندگی عددی و پایداری در مورد آن وجود ندارد. روش عددی ارائه شده بسط سریع-لیپفراگ ($L-REM$) نه تنها برای گام‌های زمانی کوچک ($\Delta t = 1\text{ ms}$)، نسبت به سایر روش‌ها دارای دقت بسیار بالاتری است، بلکه با افزایش گام زمانی ($\Delta t = 2, 4, 8\text{ ms}$) نه تنها دارای خطای به مراتب کمتری است که با خطای سایر روش‌ها برای گام‌های زمانی کوچک برابری می‌کند، بلکه دارای پایداری نیز است. در روش ارائه شده، نه تنها دقت که زمان پردازش و حافظه مورد نیاز نیز با دیگر روش‌ها تقریباً یکسان است. حال آنکه برای رسیدن به یک سطح دقت مشابه در سایر روش‌ها برای جلوگیری از خطا و پراکندگی‌های عددی باید گام‌های زمانی را کوچکتر انتخاب نمود.

مراجع

- [1] Etgen, J. (1986). High-order finite-difference reverse time migration with the 2-way non-reflecting wave equation. Stanford Exploration Project, report SEP-48, 133-146.
- [2] Kosloff, D., Filho, A., Tessmer, E., & Behle A. (1989). Numerical solution of the acoustic and elastic wave equation by new rapid expansion method. Geophysical Prospecting, (37), 383-394.
- [3] Pestana, R. C., & Stoffa, P. L. (2010). Time evolution of the wave equation using rapid expansion method. Geophysics, 75(4), T121-T131.
- [4] Soubaras, R., & Zhang, Y. (2008). Two-step explicit marching method for reverse time migration. 70th Annual International Conference and Exhibition, EAGE, Extended Abstracts.



شکل 6: مقایسه خطای مطلق دامنه نرمال شده ردهای لرزه‌ای نشان داده شده در شکل 5 برای روش بسط سریع-لیپفراگ ($L-REM$) و مقایسه آنها با روش بسط سریع-استورمر فرلت ($SV-REM$). (الف) برای گام‌های زمانی $\Delta t = 2\text{ ms}$ ، $\Delta t = 4\text{ ms}$ و $\Delta t = 8\text{ ms}$ (ب) برای $\Delta t = 2\text{ ms}$ ، (ج) برای $\Delta t = 4\text{ ms}$ ، (د) برای $\Delta t = 8\text{ ms}$ ، رد لرزه نرمال شده برای $\Delta t = 1\text{ ms}$ به عنوان رد معیار در نظر گرفته شده است.

4- نتیجه‌گیری

در این مقاله برای حل معادله موج و برای برون‌یابی میدان موج و مشتق اول آن در زمان تحت یک فرایند بازگشتی، یک روش جدید بر مبنای ترکیب روش بسط سریع و انتگرال‌گیر ترکیبی لیپفراگ ارائه شده است. انتگرال‌گیری در زمان، تنها با استفاده از تعداد عبارات بسط

-
- 1- Reverse time migration (RTM)
 - 2- Rapid Expansion Method (REM)
 - 3- Chebyshev expansion
 - 4- two-step explicit marching method
 - 5- Symplectic integrators
 - 6- accumulated errors
 - 7- Störmer-Verlet (SV)
 - 8- Leapfrog (L)
 - 9- Hamiltonian system
 - 10- central finite difference
 - 11- time-reversibility
 - 12- Störmer-Verlet-Rapid Expansion Method (SV-REM)
 - 13- Leapfrog-Rapid Expansion Method (L-REM)
 - 14- discrete Fourier transforms, DFTs
 - 15- Ricker wavelet
 - 16- reference solution

[5] Chen, J. M. (2007). High-order time discretizations in seismic modelling. *Geophysics*, 72(5), SM115–SM122.

[6] Dablain, M. A. (1986). The application of high-order differencing to the scalar wave equation. *Geophysics*, 51, 54–66.

[7] Zhang, Y., & Zhang, G. (2009). One-step extrapolation method for reverse time migration. *Geophysics*, 74(4), A29–A33.

[8] Schmidta, K., Diazb, J. & Heiera, C. (2015). Non-conforming Galerkin finite element methods for local absorbing boundary conditions of higher order. *Computers & Mathematics with Applications*, 70(9), 2252-2269.

[9] Stanglmeiera, M., Nguyena, N.C., Perairea J. & Cockburnb, B. (2016). An explicit hybridisable discontinuous Galerkin method for the acoustic wave equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 300,748–769.

[10] Baldassari, C., Barucq, H., Calandra, H., Denel, B., Diaz, J. (2009). Ultrasonic Wave Propagation in Non Homogeneous Media: The reverse time migration technique coupled with finite element methods. Springer Berlin Heidelberg, pp 207-216.

[11] Tal-Ezer, H., Kosloff, D., & Koren Z. (1987). An accurate scheme for forward seismic modelling. *Geophysical Prospecting*, (35), 479–490.

[12] Tessmer, E. (2011). Using the rapid expansion method for accurate time-stepping in modeling and reverse-time migration. *Geophysics*, 76(4), S177–S185.

[13] Skell, R. H., Zhang G., & Schlick, T. (1997). A family of symplectic integrators: Stability, accuracy, and molecular dynamics applications. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, (18), 203–222.

[14] Bonomi, E., Brieger L., Nardone, C., & Pieroni, E. (1998). 3D spectral reverse time migration with no-wraparound absorbing conditions. 78th Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts, 1925–1928.

[15] Arnold, V. I. (1989). *Mathematical methods of classical mechanics* (2nd ed.). 60, Springer.

[16] Yoshida, H. (1990). Construction of higher order symplectic integrators. *Physics Letters A*, 150, 262–268.

[17] Sexton, J. C., & Weingarten D. H. 1992. Hamiltonian evolution for the hybrid Monte Carlo algorithm. *Nuclear Physics B*, 380(3):665.

[18] Araujo, E. S., Pestana, C. R., & dos Santos, A. W. G. (2013). Symplectic schmes and poyting vector in the reverse time migration. 83rd Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts.

A New Numerical and Analytical Scheme to Solve the Full Wave Equation for Seismic Modeling Based on REM and Leapfrog Methods

F. Moradpouri^{1*}, A. Moradzadeh², R. C. Pestana³, M. Soleimani Monfared⁴

1- Ph.D. Student in Mining, Dept. of Mining, Petroleum and Geophysics, Shahrood University of Technology, Iran

2- Professor, Dept. of Mining, University of Tehran and Attendant Professor, Dept. of Mining, Petroleum and Geophysics, Shahrood University of Technology, Iran

3- Centre for Research in Geophysics and Geology (CPGG), Federal University of Bahia (UFBA), Salvador, Brazil

4- Assistant Professor, Dept. of Mining, Petroleum and Geophysics, Shahrood University of Technology, Iran

* Corresponding Author: f.moradpouri@gmail.com

(Received: May 2015, Accepted: March 2016)

Keywords	English Extended Abstract
Numerical Methods	Summary
Full Wave Equation	The aim of this paper is to present a new numerical method to solve the wave equation with a good accuracy and high stability using the Leapfrog symplectic integrator and rapid expansion method (REM). It can be used for seismic modeling and reverse time migration (RTM). Using the REM with Fourier transform method for spatial derivative, the Leapfrog-rapid expansion method (L-REM) can be even used for larger time steps. The L-REM provides the solution of the wave equation and its first time derivative at the current time step. In addition to the very low error for the small time steps, increasing the time step also lead to more accurate results and high stability in comparison with the similar methods such as Störmer-Verlet, Leapfrog and Störmer-Verlet-rapid expansion method which will also be discussed in this paper.
Wave-Field Extrapolation	
Symplectic Integrator	
Leapfrog-Rapid Expansion Method	

Introduction

Wave-field extrapolation is implemented by solving the wave equation through various mathematical methods. The finite difference method is a well-known and popular numerical tool to discretize the wave equation, and its use has been common in the approximation of the spatial and time derivatives for a wave-field. Originally, the time operator was approximated by a second-order scheme, whereas the spatial derivatives were approximated by a fourth-order scheme. Approximating the time derivative in this way may introduce numerical error, leading to distortion of the pulse and numerical dispersion, which can be avoided with small time steps at the expense of increasing the computational time. Also some other methods such as Störmer-Verlet (SV), Leapfrog (L) and Störmer-Verlet-rapid expansion method (SV-REM) have been presented to improve the solution of wave equation. In the current study, a symplectic scheme based on Leapfrog integrator and rapid expansion method (L-REM) is proposed to extrapolate the wave-field and its first derivatives in time for the same time step which can be used to calculate Poynting vectors for wave-field separation and to calculate the reflection angles.

Methodology and Approaches

In order to verify the numerical accuracy and behaviour of the error associated with Leapfrog-REM scheme a numerical example has been presented to be solved using different time sampling values. For implementation, an explosive source used in the centre of the computational domain having a Ricker wavelet with a maximum frequency of 25 Hz.

Results and Conclusions

The presented L-REM scheme provides the solution of the wave equation and its first time derivative for different time steps. In addition to the very low error for the small time steps, increasing the time step also lead in the more accurate results and high stability in comparison with the similar methods.

Cite This Paper:

Moradpouri, F., Moradzadeh, A., Pestana, R. C., Soleimani Monfared, M., (2015). "A New Numerical and Analytical Scheme to Solve the Full Wave Equation for Seismic Modeling Based on REM and Leapfrog Methods" Journal of Analytical and Numerical Methods in Mining Engineering 5(10): 41-48.