

(مقاله پژوهشی)

توسعه یک روش تحلیلی برای محاسبه معادله منحنی پوش شکست موهر - کولمب

سید احمد مهری شال^{۱*}

۱- گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران
(دریافت: مرداد ۱۳۹۹، پذیرش: اسفند ۱۳۹۹)

چکیده

اگرچه رفتار مقاومتی سنگ‌ها تحت تأثیر حالت تنش سه‌بعدی قرار دارد اما به دلیل محدودیت‌های موجود در زمینه اجرای آزمایش‌های سه محوره واقعی بر روی نمونه‌ها، همچنان معیارهای شکست دوطرفه کاربرد گسترده‌ای در مکانیک سنگ دارند. معیار موهر - کولمب یکی از پرکاربردترین معیارهای تئوری برای ارزیابی شکست سنگ است. آزمایش‌ها نشان می‌دهند که رفتار مقاومتی سنگ‌ها در دامنه وسیع تنش‌های محصورکننده، کاملاً غیرخطی است. به دلیل ضعف معیارهای تئوری در برآورد رفتار غیرخطی سنگ‌ها، برخی روابط تجربی ارائه شده است که ارزیابی بهتری از رفتار مکانیکی سنگ‌ها تحت حالات مختلف تنش و تغییر شکل فراهم می‌آورند؛ اما استفاده آگاهانه از روابط تجربی نسبتاً دشوار است زیرا پارامترهای به‌کاررفته در این معیارها عموماً دارای مفاهیم فیزیکی مشخصی نیستند؛ بنابراین ارائه یک روش تحلیلی برای محاسبه دقیق‌تر ضابطه معیار شکست که بر مبنای محاسبات ریاضیاتی استوار بوده و از ضرایب یا پارامترهای فیزیکی ملموس استفاده می‌کند، می‌تواند موجب بهبود عملکرد معیار شکست موهر کولمب برای سنگ‌ها شود. در این تحقیق ابتدا با حل دستگاه معادلات عمومی دسته دواير شکست موهر و محاسبه جواب غیرعادی آن، معادله‌ی پوش غیرخطی دواير شکست سنگ بکر به‌صورت تحلیلی محاسبه شده است. در ادامه، به کمک یک کد کامپیوتری، روش جدید در کنار روش خطی کولمب و روش تجربی هوک - براون به‌صورت یک نرم‌افزار کامپیوتری پی‌کربندی شده است؛ به‌طوری‌که امکان کاربرد، اعتبار سنجی و مقایسه نتایج روش‌های مختلف به کمک داده‌های آزمایشگاهی به‌سادگی فراهم شود. روش ارائه شده در این تحقیق از نظر سادگی محاسبه پارامترهای ورودی، دقت نتایج و ارائه معادله غیرخطی پوش شکست برحسب تنش برشی و تنش عمودی وارد بر صفحه شکست نسبت به روش‌های پیشین برتری نسبی دارد.

کلمات کلیدی

پوش شکست غیرخطی، معیار برشی سنگ بکر، حل معادله دسته دواير موهر

۱- مقدمه

$$\sigma_1 \left[(1 + \mu^2)^{1/2} - \mu \right] - \sigma_3 \left[(1 + \mu^2)^{1/2} + \mu \right] = 4T_0 \quad (4)$$

معروف‌ترین معیار شکست که در مکانیک سنگ بر اساس تنش‌های اصلی σ_1 و σ_3 ارائه شده است معیار موهر - کولمب است. موهر اظهار داشت، شکست در سنگ‌ها تنها به مقادیر تنش اصلی حداکثر σ_1 و حداقل σ_3 بستگی داشته و شکل پوش شکست (یا مکان هندسی مقادیر تنش σ_1 و τ_n وارده بر صفحه شکست که بر روی دایره موهر ترسیم می‌شوند) می‌تواند خطی و یا غیرخطی باشد. با مشارکت دیدگاه‌های موهر و کولمب در خصوص شکست، معیار شکست موهر - کولمب شکل گرفت [۸، ۹]. این معیار به دسته‌ای از روابط خطی در فضای تنش‌های اصلی σ_1 و σ_3 اطلاق می‌شود که با نادیده گرفتن تنش اصلی متوسط σ_2 ، وقوع شکست در مصالح همگن و همسانگرد را مورد بررسی قرار می‌دهند [۱۰]. معیار موهر - کولمب می‌تواند تابعی از تنش اصلی حداکثر σ_1 و تنش اصلی حداقل σ_3 و یا تابعی از تنش عمودی σ_n و تنش برشی τ_n وارده بر صفحه شکست باشد [۱۱، ۱۲].

زمانی که تمامی تنش‌های اصلی، فشاری هستند، در حالتی که مقاومت فشاری تک‌محوره، σ_c ، بسیار بزرگ‌تر از مقاومت کششی تک‌محوره، σ_t ، باشد (برای مثال $\sigma_c/\sigma_t > 10$) تجربه نشان داده است که معیار موهر - کولمب به صورت قابل قبولی در مورد سنگ‌ها قابل استفاده است؛ اما هنگامی که تنش‌ها به صورت کششی اعمال می‌شوند، برخی اصلاحاتی بایستی در این معیار انجام شود؛ زیرا مقاومت کششی تک‌محوره‌ی تئوری حاصله از این معیار انطباق مناسبی با اندازه‌گیری‌های آزمایشگاهی ندارد [۹]. شرایط موهر بر اساس این فرض بود که شکست تنها به σ_1 و σ_3 بستگی دارد که در این صورت، شکل پوش شکست یا همان مکان هندسی مقادیر τ_n و σ_n ، می‌تواند خطی و یا غیرخطی باشد. شرایط کولمب بر اساس پوش شکست، خطی است که حالت بحرانی لغزش (که در اثر ترکیبی از τ_n و σ_n در یک سطح رخ می‌دهد) را بیان می‌کند. وی بر این اساس در تحقیقات خود بر روی دیوارهای حائل، رابطه (۲) را ارائه نمود. در این رابطه دو ثابت از خواص مواد دخالت داشته و در دیاگرام موهر به صورت یک خط راست با عرض از مبدأ c و شیب φ درجه رسم می‌شود (شکل ۱). با رسم مماس بر دایره‌ی موهر در نقطه‌ی شکست و با استفاده از روابط مثلثاتی، فرم دیگری از معیار کولمب بر اساس تنش‌های σ_1 و σ_3 به صورت رابطه (۵) به دست خواهد آمد:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi + 2C \cos \varphi \quad (5)$$

فرم دیگری از این معیار نیز به صورت رابطه (۶) است:

طراحی و اجرای سازه‌های سنگی نیازمند آگاهی از آستانه مقاومت سنگ‌ها تحت شرایط تنش و تغییر شکل مختلف است. روش معمول برای کسب این آگاهی، استفاده از آزمایش‌های استاندارد سه محوره است [۱، ۲]. سپس با کمک اطلاعات به دست آمده و با استفاده از معیارهای شکست می‌توان رفتار مکانیکی سنگ را تحت شرایط حاکم پیش‌بینی کرد. معیارهای شکست عموماً یا با تنش‌های اصلی و یا سایر تبدیلات آن‌ها مثل ثابت‌های تنش، تنش‌های عمودی و برشی وارده بر صفحات اکتاهدال و غیره، بیان می‌شوند [۳، ۴]. رابطه (۱) معیار کلی شکست در سنگ‌ها را بیان می‌کند که در آن σ_1 ، σ_2 و σ_3 تنش‌های اصلی بوده و ضرایب a نیز مربوط به خواص سنگ هستند.

$$f_n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, a_1, a_2, \dots) = 0 \quad (1)$$

معمولاً معیارهای شکست سنگ بکر به صورت تجربی یا تحلیلی تعیین می‌شوند. پایه و اساس بسیاری از معیارهای تحلیلی، رابطه کولمب (رابطه (۲)) یا رابطه گریفیت (رابطه (۳)) است.

$$\tau = C + \sigma_n \tan \varphi \quad (2)$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 = -8\sigma_t(\sigma_1 + \sigma_3) \quad (3)$$

در این روابط σ_n تنش عمودی وارده و τ_n مقاومت برشی صفحه شکست است. پارامتر c مقاومت برشی ذاتی بوده که به عنوان چسبندگی ذاتی نیز شناخته می‌شود و φ نیز زاویه اصطکاک داخلی است که متعاقباً ضریب اصطکاک داخلی برابر می‌شود با $\mu = \tan \varphi$. بعلاوه σ_t نیز مقاومت کششی سنگ بکر است [۵، ۶].

گریفیت اظهار داشت که در اجسام شکننده، تمرکز تنش در نوک ریزترک‌ها موجب گسترش شکستگی می‌شود. وی معیار خود را بر پایه تغییرات انرژی پتانسیل مجموع نیروهای وارده بر جسم در اثر ترک خوردگی ارائه داد. در حقیقت هوک، بنیادسکی و انگلیش با تعریف صفحات تنش اصلی و به کمک تبدیلات ریاضیاتی و اعمال برخی ساده‌سازی‌ها، معیار گریفیت را به منظور کاربرد در مکانیک سنگ به فرم رابطه (۳) بازنویسی کردند [۷]. معیار گریفیت سطوح ترک ایجادشده را فاقد اصطکاک در نظر می‌گرفت که این موضوع در خصوص ترک‌های بسته شده، موجب نادیده گرفتن مقاومت اصطکاک بین سطوح آن‌ها می‌شد. برای این منظور کلینتوک و والش و پس از آن‌ها بریس معیار گریفیت را به شکل رابطه (۴) به روزرسانی کردند [۷]

به صورت قطعه‌ای، از ترکیب معیارهای تجربی و تئوری استفاده می‌شود. در بین ضابطه‌های تجربی، معیار شکست هوک - براون (Hoek, 1983) پرکاربردترین رابطه تجربی در برآورد شرایط شکست سنگ است (رابطه (۷)) [۱۵].

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_c \left(m_i \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + 1 \right)^{0.5} \quad (7)$$

که در آن ارتباط بین تنش‌های اصلی در لحظه شکست در سنگ بکر با استفاده از دو عامل مقاومت فشاری تک‌محوره‌ی σ_c و ثابت m_i تعیین می‌شود. هوک تأکید کرده است: "تا جایی که امکان دارد بایستی سعی شود این دو ثابت با استفاده از تحلیل‌های آماری حاصله از آزمایش سه محوره به دست آیند" [۱۵]. در مواردی از تحلیل‌های پایداری که نیاز به برآورد تنش عمودی (σ_n) و تنش برشی (τ_n) وارده بر صفحه شکست وجود دارد، در این معیار با استفاده از راه‌حل تحلیلی بالمر (Balmer, 1952) (رابطه‌های ۸، ۹ و ۱۰)، مقادیر σ_n و τ_n وارده بر صفحه‌ی شکست قابل برآورد است [۱۶].

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \frac{d\sigma_1/d\sigma_3 - 1}{d\sigma_1/d\sigma_3 + 1} \quad (8)$$

$$\tau_n = (\sigma_1 - \sigma_3) \frac{\sqrt{d\sigma_1/d\sigma_3}}{d\sigma_1/d\sigma_3 + 1} \quad (9)$$

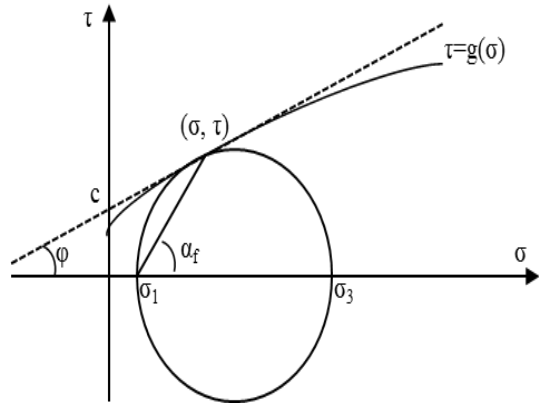
$$d\sigma_1/d\sigma_3 = 1 + 0.5m_i \left(\frac{m_i \sigma_3}{\sigma_c + 1} \right)^{-0.5} \quad (10)$$

امروزه با استفاده از نرم‌افزارهای کامپیوتری، علی‌رغم پیچیدگی روابط تجربی ارائه‌شده، کار با معیارهای غیرخطی همانند معیار هوک - براون و روابط اصلاح‌شده‌ی بالمر بسیار آسان شده است. به‌عنوان مثال به‌سادگی می‌توان با استفاده از نرم‌افزارهای RockLab یا RockData (از مجموعه‌ی نرم‌افزاری rockscience) معادله معیار شکست هوک - براون را به دست آورد و همچنین پوش شکست غیرخطی دوایر موهر حاصله از آزمایش‌های سه محوره را ترسیم نمود؛ بنابراین به دلایل نارسایی و دقت کم معیارهای خطی و همچنین سهولت امکان استفاده از معیارهای غیرخطی، بهتر است در تحلیل‌ها از معیارهای غیرخطی دقیق‌تری استفاده شود.

در ریاضیات مفهومی وجود دارد که بر اساس آن: "جواب غیرعادی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول، جوابی است که منحنی آن بر کلیه منحنی‌های جواب عمومی و بر هر کدام فقط در یک نقطه مماس است؛" بنابراین از آنجایی که دسته دوایر شکست موهر نیز تناوبی از منحنی‌های دو پارامتری هستند،

$$\tau_m = C \cos \varphi + \sigma_m \sin \varphi \quad (6)$$

که در آن $\tau_m = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ و $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ است. با دانستن این روابط، معیار شکست کولمب و همچنین دایره‌ی حالت تنش (σ_1 و σ_3) وارده در صفحه‌ی τ و σ قابل ترسیم است به‌طوری‌که در صورت مماس شدن این دایره بر پوش کولمب، شکست رخ خواهد داد [۱۰].



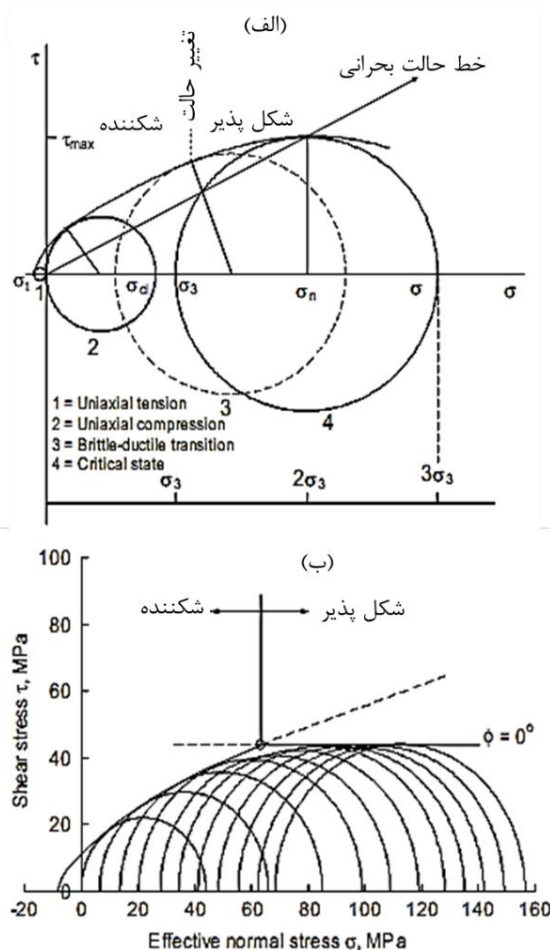
شکل ۱- دیاگرام موهر و پوش شکست خطی و غیرخطی [۱۰]

معیار موهر و کولمب از این نظر حائز اهمیت است که تأثیر σ_m تنش متوسط در صفحه‌ی σ_1 و σ_3 را که برای موادی از قبیل سنگ و خاک مهم است، مورد توجه قرار می‌دهد. به‌عنوان مثال آزمایش‌ها در سنگ‌ها و خاک‌ها نشان داده‌اند که مقدار τ_m منطبق بر شکست با σ_m افزایش می‌یابد؛ اما ادعای دیگر در خصوص این‌که نقطه‌ی تماس دایره‌ی تنش بحرانی با پوش شکست بیانگر تنش عمودی و برشی وارده بر صفحه‌ی شکستی که با تنش حداکثر زاویه α_f (شکل ۱) دارد، است همیشه در آزمایش‌ها مشاهده نمی‌شود. با این حال معیار موهر شکل خمیده‌ای از پوش شکست را ارائه می‌دهد و این رفتار غیرخطی در بسیاری از انواع سنگ‌ها مشاهده شده است.

مزیت معیار موهر - کولمب در سادگی فرم ریاضی آن، معانی فیزیکی واضح پارامترهای آن و پذیرش عمومی آن نهفته است [۱۰]. البته ناگفته نماند، یکی دیگر از محدودیت‌های معیار موهر - کولمب نادیده گرفتن تأثیر σ_2 در شکست است. به همین دلیل یک معیار شکست خطی با استفاده از تأثیر تنش متوسط σ_2 توسط پائول (Paul, 1968) ارائه و توسط مییر و لابوز (Meyer & Labuz, 2012) و سینگ و همکارانش (Singh et al., 2020) اجرا شده است که البته خارج از بحث این نوشتار بوده و به آن پرداخته نشده است [۱۲-۱۴].

عموماً در بسیاری از کاربردهای مهندسی سنگ، یا از پوش خطی کولمب برای انطباق بر داده‌ها استفاده می‌شود و یا

مهمی که از این بحث می‌توان گرفت آن است که پاسخ مقاومتی سنگ در تنش‌های محدودکننده زیاد کاملاً از حالت خطی معیار انحراف دارد. از این رو در مواردی که نیاز به دانستن پاسخ رفتاری سنگ در چنین مقادیری از تنش باشد بایستی از معیار غیرخطی در این خصوص استفاده کرد.



شکل ۲- (الف) حالت بحرانی سنگ بکر بیانگر این است که پوش موهر به نقطه‌ای با شیب صفر برسد [۱۷]. (ب) حالت بحرانی برای سنگ آهک [۱۵].

۳- حل معادلات دسته دوایر شکست موهر و محاسبه معادله پوش

در معادلات دیفرانسیل، جواب غیرعادی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول، جوابی است که منحنی آن بر کلیه منحنی‌های جواب عمومی و بر هر کدام فقط در یک نقطه مماس باشد. فرض کنیم $F(x, y, u) = 0$ معادله یک دسته منحنی باشد که در آن u یک پارامتر است. پوش این دسته منحنی‌ها، یک منحنی است که در هر نقطه با یکی از منحنی‌های دسته به‌طور مماس تماس پیدا می‌کند و از حذف

می‌توانند دارای یک منحنی پوش باشند که معادله آن به‌صورت ریاضیاتی قابل محاسبه است. در این راستا طی تحقیق پیشرو سعی شده است تا با استفاده از حل دسته معادلات دیفرانسیل دوایر موهر، جواب غیرعادی معادله دسته دوایر موهر یا معادله منحنی مماس بر این دوایر (یا همان پوش شکست سنگ) به‌صورت تحلیلی محاسبه شود.

۲- رفتار عمومی سنگ‌ها تحت تنش‌های محصورکننده

مقاومت در سنگ‌ها (به دلیل سازوکار اصطکاکی مصالح دانه‌ای) عموماً با افزایش تنش‌های محصورکننده، افزایش می‌یابد. نرخ افزایش مقاومت سنگ با افزایش تنش‌های محصورکننده در محدوده تنش‌های کم، بسیار زیاد است. رفته‌رفته با افزایش تنش محصورکننده، این نرخ افزایش مقاومت، کاهش می‌یابد. علت آن هم بروز رفتار اتساعی و شکننده در تنش‌های کم است. میکرو ترک‌هایی که در سنگ وجود دارند به علت افزایش حجم سنگ در شروع شکست، باز می‌شوند که این امر موجب می‌شود تا در تنش‌های محصورکننده کم، مقدار زاویه اصطکاک داخلی بیشتری حاصل شود. در تنش‌های محصورکننده بیشتر، تمایل سنگ به بازشدگی میکرو ترک‌ها و اتساع سنگ محدود می‌شود؛ بنابراین سازوکار شکست از حالت شکننده به حالت شکل‌پذیر انتقال یافته و زمانی که تنش محصورکننده به اندازه کافی زیاد شد، سنگ کاملاً شکل‌پذیر می‌شود.

همان‌طور که در شکل ۲ (الف) نشان داده شده است، پوش شکست سنگ که در دستگاه τ - σ رسم می‌شود، غیرخطی بوده و تقعر آن به سمت پایین است. اشاره شد که شیب این پوش در ابتدای منحنی زیاد بوده و رفته‌رفته در تنش‌های محصورکننده‌ی بیشتر، کاهش می‌یابد تا به‌صورت افقی درآید. این پدیده توسط بارتن (Barton, 1976) حالت بحرانی سنگ نام‌گذاری شده است [۱۷]. حالت بحرانی برای سنگ بکر به حالتی گفته می‌شود که پوش شکست مقاومت برشی سنگ در نقطه‌ای به شیب صفر برسد (شکل ۲ (الف)). این شرایط، حداکثر مقاومت برشی ممکن سنگ را بیان می‌کند.

برای هر سنگ یک مقدار تنش محصورکننده مشخصی وجود دارد که بعد از آن مقدار، مقاومت برشی سنگ دیگر افزایش نمی‌یابد. این موضوع که پوش موهر به حالتی با شیب صفر می‌رسد توسط هوک (Hoek, 2007) و سینگ (Singh and Rao, 2005) نیز حمایت می‌شود (شکل ۲ (ب)) [۱۵، ۱۸]. نتیجه

است معادله به فرم $F(\sigma, \tau, u)=0$ نوشته شود و در دستگاه معادلات (۱۱) جاگذاری شده و پارامتر u از دستگاه حذف شود. اما معادله عمومی دواير موهر به صورت $F(\sigma, \tau, C, R^2)=0$ است. عوامل R^2 (مجذور شعاع دواير) و C (مرکز دواير موهر) در معادله دواير وابسته به σ_1 و σ_3 هستند.

طبق بررسی انجام شده در این تحقیق که نتایج آن در شکل ۳ نشان داده شده است، مشاهده شد که اغلب همبستگی بین این دو عامل با ضریب تعیین قابل قبولی ($r^2 > 0.9$) خطی است. بدین ترتیب با استفاده از داده‌های σ_1 و σ_3 به دست آمده از آزمایش سه محوره، مقادیر C و R^2 محاسبه شده و به کمک روش برازش خطی، رابطه بین این دو به دست می‌آید. سپس یکی از این دو پارامتر u نامیده شده و در معادله عمومی (x - $R^2+y^2=C$) جاگذاری شده و دستگاه (۱۱) حل می‌شود. با حل این دستگاه، معادله پوش دواير موهر به دست می‌آید. در ادامه به صورت پارامتری مراحل محاسبات گام به گام اجرا می‌شود: مقادیر C و R^2 و رابطه خطی بین آن‌ها محاسبه شده و به صورت رابطه (۱۳) به دست می‌آید:

$$R^2 = A \times C + B \quad (13)$$

که در آن A و B ضرایب برازش خطی هستند. با جاگذاری در $(x-C)^2 + y^2 = R^2$ داریم (رابطه (۱۴)):

$$\tau^2 + (\sigma - C)^2 = A \times C + B \quad (14)$$

حال C (که معرف مرکز دایر است) را u نامیده و دستگاه رابطه (۱۵) را حل کرده و u را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} F(x, y, u) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial u} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \tau^2 + (\sigma - u)^2 - (A \times u + B) = 0 \\ -2(\sigma - u) - A = 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$\rightarrow u = \frac{A + 2\sigma}{2}$$

مقدار u را در دستگاه قرار داده، بنابراین معادله پوش این دسته دواير که همان معادله پوش شکست نیز هست، برابر است با (رابطه (۱۵)):

$$\tau = \sqrt{A\sigma + \left(\frac{A^2}{4} + B\right)} \quad (15)$$

در این رابطه A و B همان ضرایب برازش خطی بین R^2 (مجذور شعاع دواير) و C (مرکز دواير موهر) هستند. در پیوست ۲ با استفاده از یک مثال عملی روند محاسبات و کاربرد روش ارائه شده نشان داده شده است.

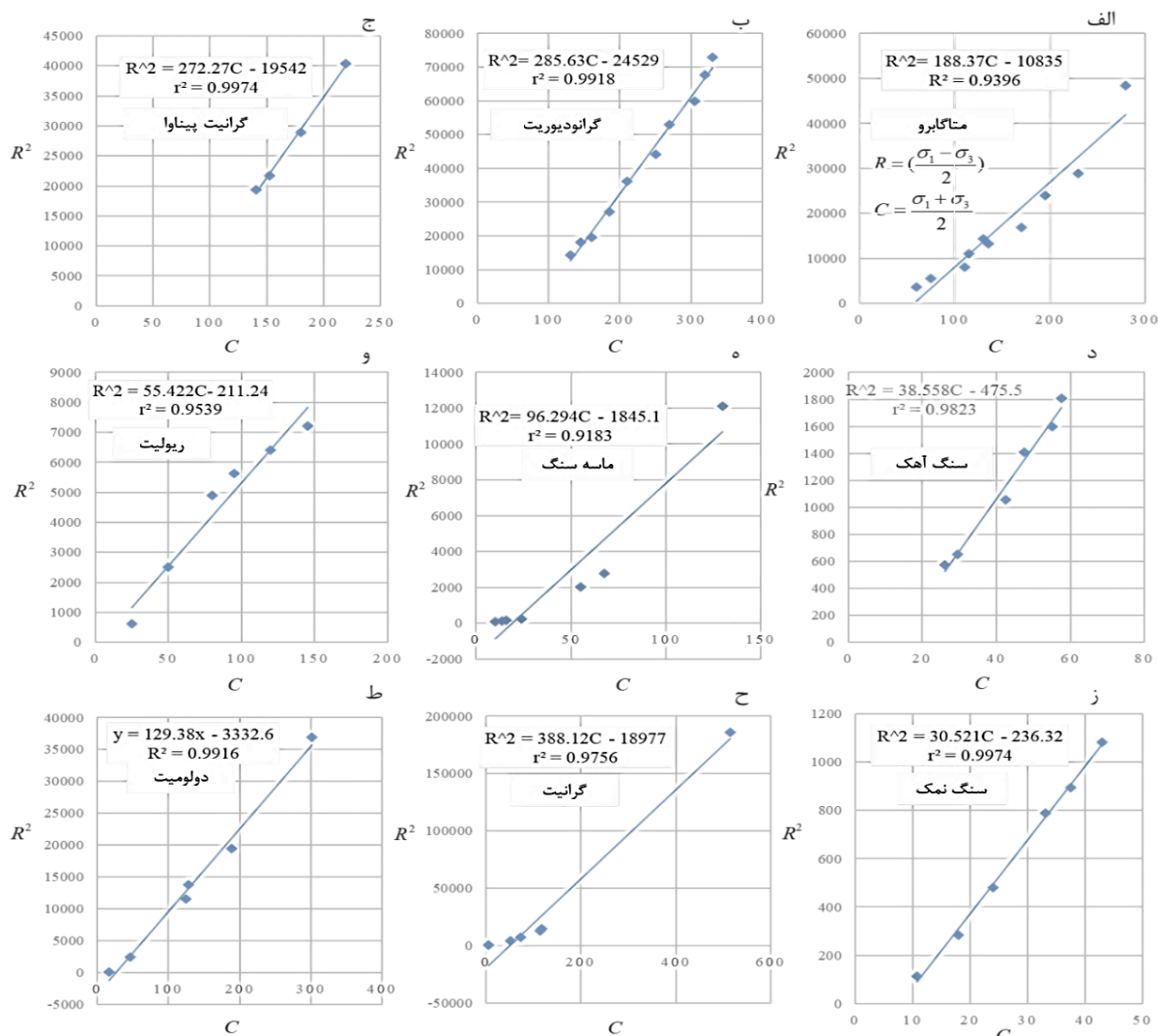
پارامتر u در دستگاه رابطه (۱۱) به دست می‌آید. این دستگاه معادلات شامل معادله اصلی دسته منحنی‌ها و معادله‌ای است که با مشتق گرفتن از معادله اصلی نسبت به پارامتر u به دست می‌آید. با حذف پارامتر u از این معادلات، می‌توان معادله پوش را به شکل صریح یا ضمنی به دست آورد.

$$\begin{cases} F(x, y, u) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial u} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

اگر حذف u عملاً ممکن نباشد، می‌توان مختصات پوش را نسبت به پارامتر u بیان نمود. البته بایستی توجه کرد که گاهی اوقات نتیجه‌ای که از حذف u در دستگاه (۱۱) به دست می‌آید ممکن است پوش نباشد و یا قسمتی از پوش باشد. درواقع دستگاه معادلات فوق، شرط لازم برای وجود پوش است؛ یعنی علاوه بر منحنی پوش، جواب دستگاه معادلات ممکن است شامل نقاط تکین منحنی‌های دسته‌ای باشد که متعلق به پوش نیستند. مجموعه‌ی تمام جواب‌های این دستگاه معادلات، منحنی مبین^۲ نامیده می‌شود. به‌طور کلی، می‌توان گفت که پوش قسمتی از منحنی مبین است. قابل ذکر است برای یافتن معادله‌ی یکتای پوش، می‌بایست ابتدا شروط کافی بررسی شوند؛ یعنی علاوه بر دستگاه معادلات فوق، نامساوی‌های رابطه (۱۲) نیز برقرار باشند:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \neq 0, \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial x} u & \frac{\partial F}{\partial y} u \end{vmatrix} \neq 0 \end{cases} \quad (12)$$

در پیوست ۱، پوش دسته منحنی $(x-u)^2 + y^2 = 4$ به عنوان مثال محاسبه شده است. در خصوص معادلات دواير شکست موهر، نامساوی‌های رابطه (۱۲) همواره برقرارند؛ بنابراین با استفاده از این روش می‌توان معادله پوش دواير موهر حاصله از شکست سنگ در آزمایش سه محوره را با دقت بسیار خوبی محاسبه نمود. همان‌طور که در شکل ۲ نشان داده شده است، به دلیل سازوکار اصطکاکی مقاومت مصالح سنگی و تأثیرپذیری آن از تخلخل و تراکم‌پذیری سنگ‌ها، رفتار مقاومتی نمونه‌های سنگی در آزمایش سه محوره تحت تنش‌های محصورکننده مختلف، متفاوت است. در نتیجه در دواير موهر، مرکز و شعاع دواير با یکدیگر متفاوت خواهند بود. پس معادله عمومی این دواير به صورت $(\sigma - C)^2 + \tau^2 = R^2$ بوده و عملاً دارای دو پارامتر مجزا خواهد بود. برای به دست آوردن معادله پوش این دواير، لازم



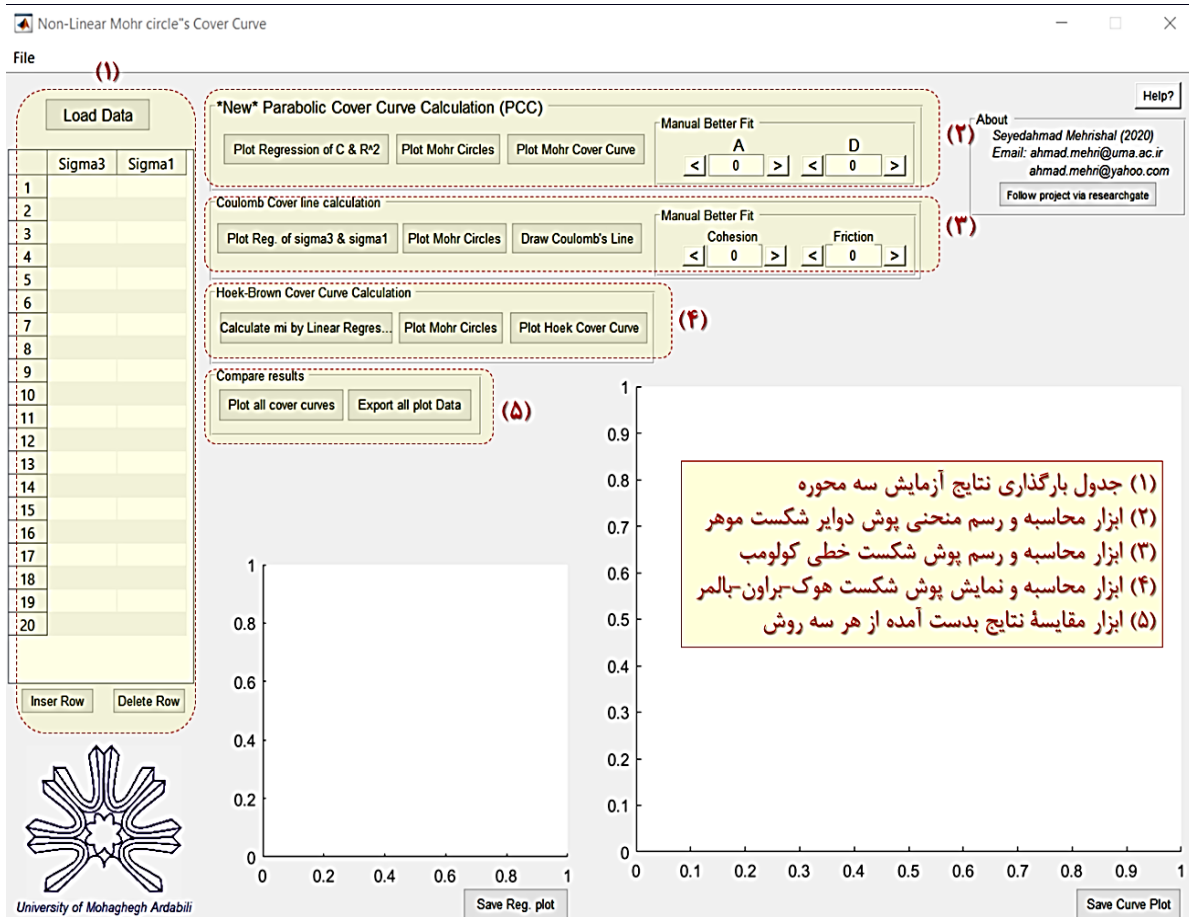
شکل ۳- بررسی همبستگی بین C و R² با استفاده از داده‌های به‌دست‌آمده از آزمایش‌های سه محوره (داده‌ها برگرفته از [۱۵، ۱۹]).

نرم‌افزار در سیستم‌عامل‌های ۳۲ بیتی، اجرای برنامه تنها در بستر نرم‌افزار متلب امکان‌پذیر است. این برنامه در پیوست ۳ مقاله قابل دسترس است.

نتایج به‌دست‌آمده از آزمون‌های سه محوره بر روی نه نوع سنگ مختلف (که به ترتیب عبارت‌اند از: متاگابرو، گرانودیوریت، گرانیت پیناوا، دیوریت، نمک، گرانیت، ماسه‌سنگ، مرمر و دولومیت) در اینجا گردآوری شده و به کمک برنامه ارائه‌شده، ضوابط شکست آن‌ها توسط روابط مختلف مورد بررسی قرار گرفت.

۴- توسعه کد کامپیوتری و بررسی نتایج

به‌منظور بررسی چگونگی عملکرد این روش در محاسبه پوش شکست سنگ بکر نسبت به سایر روش‌های موجود و همچنین سهولت استفاده و ارزیابی کاربران از روش ارائه‌شده در این تحقیق، یک کد کامپیوتری با رابط گرافیکی ساده تولید شده است. تصویر صفحه اول برنامه به همراه توضیحات مختصر بخش‌های اصلی برنامه در شکل ۴ نشان داده‌شده است. این برنامه در محیط نرم‌افزار MATLAB، نسخه ۲۰۱۷ توسعه داده‌شده است. نسخه ۶۴ بیتی این برنامه قابلیت نصب مستقل بر روی سیستم‌عامل ویندوز را دارد اما برای استفاده از این

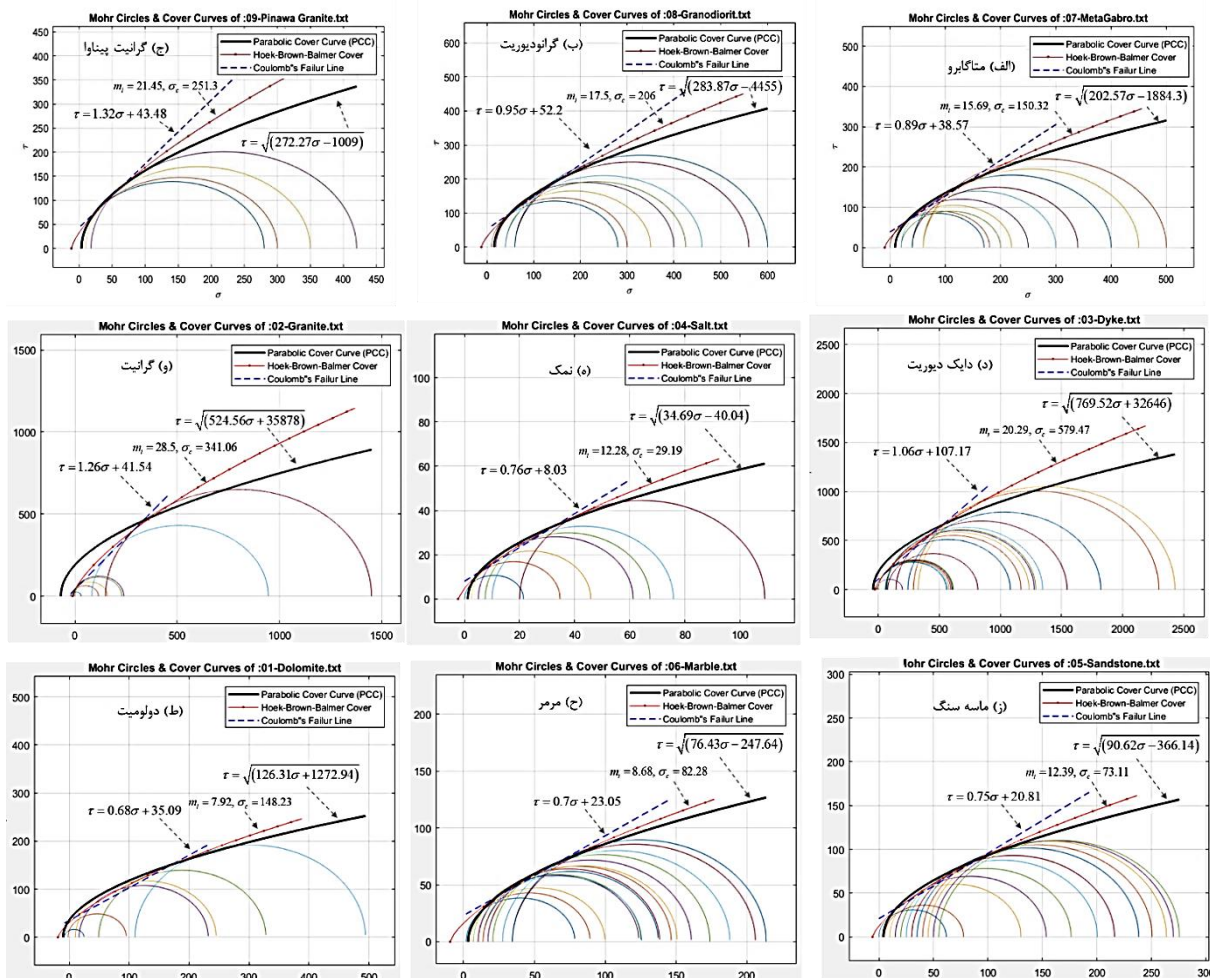


شکل ۴- تشریح بخش‌های اصلی رابط گرافیکی کد محاسبه معادله منحنی پوش دواير شکست موهر.

۵- بحث

مشاهده می‌شود که نتایج به‌دست‌آمده از روش حل معادله دسته دواير موهر، همخوانی خوبی با منحنی حاصله از روش هوک - براون - بالمر دارد. با این تفاوت که کار با روش پیشنهادی این تحقیق بسیار آسان‌تر از روش بالمر است. علاوه با استفاده از روش بالمر نمی‌توان معادله پوش شکست دواير موهر را به دست آورد بلکه تنها مکان هندسی نقاط بیانگر تنش‌های عمودی (σ_n) و برشی (τ_n) وارده بر صفحه شکست در دستگاه (τ, σ) قابل ترسیم است و چنانچه در مواردی نیاز به معادله شکست باشد، تنها می‌توان از طریق برازش منحنی توانی^۳ معادله پوش را به دست آورد که البته از دقت لازم برخوردار نخواهد بود. این در حالی است که روش ارائه‌شده در این تحقیق با دقت قابل قبولی معادله پوش شکست یا همان جواب غیرعادی معادلات دسته دواير موهر را به دست می‌دهد.

قابل‌ذکر است این برنامه برای محاسبه معیار شکست حداقل به نتایج سه آزمون سه محوره که تحت فشارهای محصورکننده متفاوت بر روی یک نوع سنگ اجرا شده باشند نیاز دارد. البته پیشنهاد می‌شود برای رسیدن به نتایج دقیق‌تر، تعداد پنج آزمایش سه محوره یا بیشتر برای هر سنگ اجرا شود. ابتدا با توجه به مقادیر تنش محوری حداکثر σ_1 و تنش محصورکننده σ_3 به‌دست‌آمده در لحظه شکست نمونه، دواير شکست موهر در دستگاه مختصاتی (τ, σ) رسم می‌شود (شکل ۵). در ادامه با کمک تشکیل دستگاه معادلات (۱۱) برای هر نمونه سنگ و به دست آوردن جواب غیرعادی دستگاه (یا همان معادله‌ی پوش دسته دواير شکست موهر) منحنی پوش شکست سنگ محاسبه و ترسیم شده است (منحنی سیاه‌رنگ با خط پیوسته در شکل ۵). همچنین موقعیت مکانی نقاط به‌دست‌آمده از روش بالمر که بیانگر منحنی پوش شکست سنگ بکر به روش هوک - براون است نیز با نقاط قرمز رنگ و خط نازک بر روی شکل ۵ نشان داده شده است. پوش شکست خطی کولمب نیز به‌صورت خط چین آبی‌رنگ ترسیم شده است.



شکل ۵- مقایسه پوش‌های شکست به‌دست‌آمده از روش هوک-براون-بالمر، روش خطی کولمب و روش غیرخطی ارائه‌شده در این تحقیق

واقعیت انطباق ندارد و این موجب می‌شود روش مذکور در محدوده تنش‌های کم محافظ کارانه باشد. علت وقوع این امر آن است که داده‌های ورودی در محدوده تنش موردنظر کافی نبوده است. برای بهبود انطباق این روش با واقعیت، بهتر است آزمون سه محوره تحت تنش‌های محصورکننده کم و تحت تنش‌های کششی نیز اجرا شده و داده‌ها در تحلیل روش وارد شوند.

موضوع مهم آخر این است که پوش شکست به‌دست‌آمده از هر سه روش کاملاً صعودی بوده، بنابراین اگرچه هیچ‌کدام نمی‌توانند بیانگر حالت بحرانی سنگ تحت تنش‌های محصورکننده خیلی زیاد باشند، اما همان‌طور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود، نرخ رشد منحنی پوش شکست مبتنی بر حل معادلات دسته دوایر موهر (که در این تحقیق معرفی شده است) در مقایسه با سایر روش‌ها به واقعیت نزدیک‌تر است.

اگرچه در بسیاری از حالات تنش، نتایج به‌دست‌آمده از این دو روش با یکدیگر تطابق دارند اما در مواردی که آزمون‌های سه محوره به تعداد کافی و با توزیع یکنواخت مقادیر تنش‌های محصورکننده بر روی نمونه‌ها اجرا شده است، (نمونه‌های الف، ب، ج، ه، ز، ح در شکل ۵) منحنی حاصله از روش پیشنهادی این تحقیق نسبت به هر دو روش بالمر و خط کولمب انطباق بهتری با دوایر شکست دارد. از این رو آنچه مسلم است این است که هرچقدر تعداد آزمایش‌های اجرا شده بر روی نمونه‌های سنگی بیشتر بوده و توزیع مقادیر تنش‌های محصورکننده (از مقادیر کم منفی تا مقادیر نسبتاً زیاد مثبت) یکنواخت‌تر باشد، نتایج به‌دست‌آمده از هر سه روش به واقعیت نزدیک‌تر خواهد بود.

نکته قابل‌مشاهده دیگر در منحنی نتایج آن است که بعضاً پوش شکست تحلیلی ارائه‌شده در این تحقیق مقادیر بسیار کم و حتی صفر برای چسبندگی به دست می‌دهد که این امر با

۶- نتیجه‌گیری

طبق اظهارات هوک (۲۰۰۷)، برخی از ویژگی‌های یک معیار شکست که کمک می‌کند تا معیار در کاربردهای عملی قابلیت اجرا داشته باشد این است که [15]:

پارامترهای استفاده‌شده در آن به راحتی قابل اندازه‌گیری باشند.

مقاومت را تحت تنش‌های دلخواه به خوبی برآورد نماید. معیار بایستی از نظر ریاضی ساده بوده و ترجیحاً دارای پارامترهای بی بعد باشد.

از همه مهم‌تر اینکه برای توده سنگ دارای یک یا چند دسته‌دوزه نیز کاربرد داشته باشد.

این‌ها همان دلایلی هستند که موجب شده است تا برخلاف وجود معیارهای مختلف، همچنان معیار کولمب بیش از سایرین در عمل مورد استفاده قرار گیرد؛ اما محدودیت مهم این معیار خطی بودن آن است. اساساً عموم معیارهایی که برای شکست سنگ ارائه شده است یا کاملاً پایه تجربی داشته (معیار هوک - براون) و یا به صورت تئوری و بر اساس فرض‌های ساده‌سازی شده ارائه شده‌اند (پوش خطی کولمب). علت اصلی گرایش به روابط تجربی نیز این است که پاسخ مقاومتی سنگ در تنش‌های محدودکننده خیلی کم و خیلی زیاد، از حالت خطی معیار انحراف دارد. از این رو در مواردی که نیاز به دانستن پاسخ رفتاری سنگ در چنین مقادیری از تنش باشد، بایستی از معیار غیرخطی در این خصوص استفاده کرد. در مجموع، همواره معیارهای غیرخطی انطباق بهتری بر واقعیت دارند؛ بنابراین به نظر می‌رسد توسعه معیار تئوری غیرخطی ارائه شده در این تحقیق که با کمک معادلات دیفرانسیل و با روش تحلیلی به دست آمده است، گام مفیدی در این راستا باشد.

همان‌طور که بیان شد، یکی از روش‌هایی که برای محاسبه پوش شکست دواپر موهر توسط محققین پیشین به کار گرفته شده است، استفاده از معادلات بالمر است؛ اما محدودیت اصلی که روش بالمر دارد این است که ابتدا می‌بایست معادله معیار شکست (خطی یا غیرخطی) بر حسب تنش‌های اصلی حداکثر و حداقل وجود داشته باشد تا اینکه بتوان از مشتق ضمنی آن برای محاسبه مقادیر تنش عمودی و تنش برشی لحظه‌ای وارد بر صفحه شکست استفاده کرد. بعلاوه حتی با داشتن معادله شکست، روابط بالمر در نهایت امکان محاسبه مکان هندسی نقاط در دستگاه مختصات σ_n , τ_n را داشته و نمی‌تواند معادله پوش شکست دواپر موهر را به دست آورد؛ بنابراین برتری معیار

غیرخطی تئوری ارائه شده در این تحقیق آن است که اولاً معادله پوش شکست با دقت قابل قبولی محاسبه می‌شود به طوری که در نهایت یک معادله حاصل می‌شود که تحت هر تنش دلخواه قابل استفاده است. از این رو با کمک روابط تبدیل تنش و مقادیر τ_n و σ_n به دست آمده از این روش، راستای احتمالی صفحات شکست سنگ بکر نیز نسبت به تنش‌های اصلی قابل برآورد است. دوماً پارامترهای ورودی این معیار تماماً قابل فهم بوده و از روی نتایج آزمایش‌های سه محوره، قابل اندازه‌گیری هستند. همچنین منبای این روش تئوری بوده و حل ریاضی آن نیز بسیار ساده است.

برای اینکه روش مذکور به آسانی در اختیار مهندسان ژئوتکنیک قرار گرفته و بهتر ارزیابی شود، تمامی معادلات و تجزیه‌تحلیل‌های مورد نیاز برای رسیدن به جواب در قالب یک برنامه کامپیوتری با رابط گرافیکی بسیار ساده آماده‌سازی شده است نحوه دسترسی به آن در پیوست ۳ تشریح شده است.

راه و روش ارائه شده در این پژوهش محدودیت‌هایی نیز دارد. به عنوان مثال، گاهی در سنگ‌هایی با رفتار پیچیده، نتایج به دست آمده از آزمون‌های سه محوره، پراکندگی زیادی دارند، بنابراین نتیجه‌ای که از حل این معادلات به دست می‌آید ممکن است پوش نباشد و یا قسمتی از پوش باشد. به بیان ساده‌تر، معادله پوش به دست آمده در این تحقیق تنها به ازای مقادیری از تنش عمودی صادق است که عبارت زیر رادیکال منفی نشود. از طرف دیگر این روش نمی‌تواند حالت بحرانی سنگ را تحت تنش‌های خیلی زیاد تشریح نماید زیرا معادله پوش به دست آمده همواره صعودی بوده و همواره دارای شیب مثبت و بزرگ‌تر از صفر است و حد مشتق آن فقط در بی‌نهایت به صفر میل می‌کند. از این رو به نظر می‌رسد دامنه کاربرد این روش بیشتر به تنش‌های کم تا متوسط محدود شود.

۷- فهرست نمادها

در جدول ۱ فهرست نمادها آورده شده است.

جدول ۱ فهرست نمادها

نماد	واحد	شرح
σ_{ci}	MPa	مقاومت فشاری تک‌محوره سنگ بکر
σ_1	MPa	تنش اصلی حداکثر (تنش محوری)
σ_2	MPa	تنش اصلی متوسط
σ_3	MPa	تنش اصلی حداقل (تنش محصورکننده)
σ_t	MPa	مقاومت کششی
τ_n	MPa	مقاومت برشی وارده بر صفحه شکست
نماد	واحد	شرح
σ_n	MPa	تنش عمودی وارده بر صفحه شکست
c	MPa	چسبندگی ذاتی
φ	Degree	زاویه اصطکاک داخلی
μ	-	ضریب اصطکاک داخلی
m_i	-	ثابت ماده سنگ هوک براون
A & B	-	ضرایب برازش خطی
C	-	مرکز دایره موهر
R	-	شعاع دایره موهر

مراجع

- [7] Ileana, P. (2004). The Application of Griffith's Theory in Rock Fracture. *Annals of the Faculty of Engineering Hunedoara, Tome II, Fasciole*.
- [8] Coulomb, C. (1776). Sur une application des règles maximis et minimis a quelques problèmes de statique, relatives a l'architecture. *Acad Sci Paris Mem Math Phys*, 7: 343-382.
- [9] Mohr, O. (1900). Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials. *Zeit des Ver Deut Ing*, 44: 1524-1530.
- [10] Labuz, J., & Zang, A. (2012). Mohr-Coulomb Failure Criterion. *Rock Mech Rock Eng*, 45(6), 975-979 DOI 10.1007/s00603-012-0281-7.
- [11] Jaeger, J., & Cook, N. (1979). *Fundamentals of Rock Mechanics*. 3rd Edn. London: Chapman & Hall, Pp 593.
- [12] Meyer, J., & Labuz, J. (2012). Linear Failure Criteria with Three Principal Stresses. *Int J Rock Mech Min Sci*, Submitted.
- [13] Paul, B. (1968). Generalized Pyramidal Fracture and Yield Criteria. *Int J Solids Struct*, 4: 175-196.
- [14] Singh, A., Ayothiraman, R., & Rao, K. S. (2020). Failure Criteria for Isotropic Rocks Using a Smooth Approximation of Modified Mohr-Coulomb Failure Function. *Geotechnical and Geological Engineering*, 38(4), 4385-4404.
- [15] Hoek, E. (2007). *Practical Rock Engineering*. Course Notes, Hoek Corner: [Http://www.rocscience.com](http://www.rocscience.com).
- [16] Balmer, G. (1952). A general analytical solution for Mohr's envelope. *Am. Soc. Test. Mat.*, 4(13), 52, 1260-1271.
- [17] Barton, N. (1976). Rock Mechanics Review: The Shear Strength of Rock and Rock Joints. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, (pp. 13, 255-279).
- [18] Singh, M., and Rao, K. (2005). Bearing Capacity of Shallow Foundations in Anisotropic Non-Hoek-Brown Rock Masses. *Asce J Geotech Geo-Environ Eng*, 131(8): 1014-23.
- [19] Walton, G., Labrie, D., & Alejano, L. R. (2019). On the Residual Strength of Rocks and Rockmasses. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 52(11), 4821-4833.
- [1] ISRM, (1978) Suggested methods for determining the strength of rock material in triaxial compression: International society for rock mechanics commission on standardization of laboratory and field tests. Pergamon Press Ltd. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. Vol. 15*. pp. 47-51.
- [2] ASTM (2015) D7012 Standard Test Method for Compressive strength and elastic moduli of intact rock core specimens under varying states of stress and temperatures. ASTM International, West Conshohocken (USA), p 9.
- [3] Moshrefi, S., Shahriar, K., Ramezanzadeh, A., & Goshtasbi, K. (2019). New empirical failure criterion for shale. *Journal of Mining and Environment*, 10(1), 287-304.
- [4] Singh, A., Ayothiraman, R., & Rao, K. S. (2020). Failure Criteria for Isotropic Rocks Using a Smooth Approximation of Modified Mohr-Coulomb Failure Function. *Geotechnical and Geological Engineering*, 38(4), 4385-4404.
- [5] Coulomb, C. (1776). Sur une application des règles maximis et minimis a quelques problèmes de statique, relatives a l'architecture. *Acad Sci Paris Mem Math Phys*, 7: 343-382.
- [6] Griffith, A. (1921). The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A*, 221: 163-198.

پیوست‌ها

پیوست ۱:

مثال: محاسبه معادله پوش شکست دسته دوایر با معادله

$$(x-u)^2 + y^2 = 4 \quad \text{عمومی}$$

از رابطه $(x-u)^2 + y^2 = 4$ نسبت به u مشتق گرفته می‌شود:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0 \rightarrow -2(x-u) = 0 \rightarrow x = u \quad (1)$$

سپس u در دستگاه زیر حذف می‌شود:

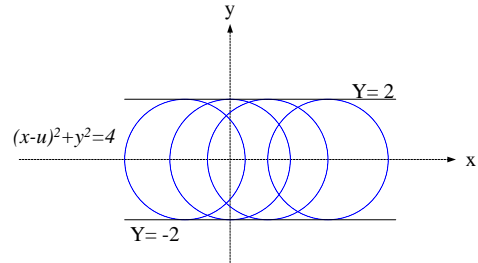
$$\left\{ \begin{array}{l} (x-u)^2 + y^2 = 4 \\ x = u \end{array} \right\} \quad (2)$$

در نتیجه چنین بدست می‌آید:

$$y^2 = 4, \quad y = \pm 2 \quad (3)$$

خطوط $y = \pm 2$ معادلات پوش هستند که در شکل ۱ به

تصویر کشیده شده‌اند.

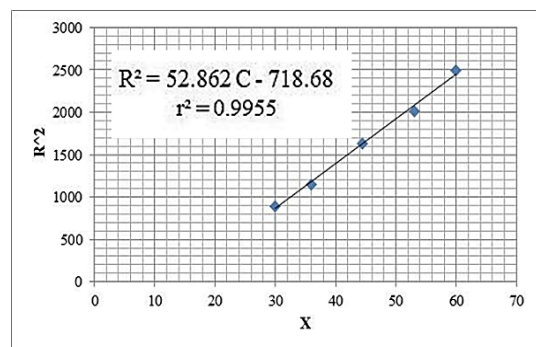


شکل ۱- پوش دسته منحنی با معادله $(x-u)^2 + y^2 = 4$.

پیوست ۲:

مثال: نتایج تنش‌های محوری و محصور کننده در لحظه

شکست (بدست آمده از یک سری آزمایش سه محوره) در شکل ۲ بر حسب مگاپاسکال ارائه شده است. همچنین مقادیر C و R^2 و معادله‌ی خطی بین آنها مطابق جدول بدست آمده است. در ادامه معادله پوش شکست این سنگ محاسبه شده و نتایج به صورت ترسیمی در شکل ۲ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود منحنی پوش بدست آمده از روش جدید ارائه شده در این تحقیق انطباق بسیار مناسبی بر دایره شکست سنگ بدست آمده از آزمایش سه محوره دارد.



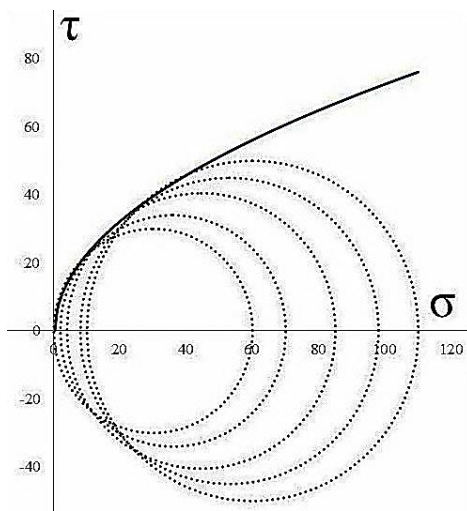
σ_1	σ_3		R	C	R^2
60	0		30	30	900
70	2		34	36	1156
85	4		40.5	44.5	1640.25
98	8		45	53	2025
110	10		50	60	2500

شکل ۳- نتایج حاصله از آزمایش سه محوره.

بدین ترتیب طبق روش ارائه شده معادله پوش شکست

برای این نوع سنگ برابر است با:

$$\tau = \sqrt{52.8618 \times \sigma - 20.0815} \quad (3)$$



شکل ۲- منحنی پوش شکست بدست آمده از روش تحلیلی

پیوست ۳:

کد کامپیوتری توسعه داده شده در این تحقیق از این

طریق قابل دسترسی است:

نسخه ۶۴ بیتی قابل نصب بر روی ویندوز با حجم ۴۰

مگابایت از لینک [Mohr-Cover-Curve-64bit-2020-0310](http://www.researchgate.net/publication/338106447_Mohr-Cover-Curve-64bit-2020-0310) و

نسخه کم حجم تحت نرم‌افزار متلب نیز از لینک

[Matlab Code-2020-0310](https://www.researchgate.net/publication/338106447_Matlab-Code-2020-0310) قابل دانلود است.

¹ Critical State

² Discriminant Curve

³ power law curve fitting