دوره ۱۴، شماره ۴۰، پاییز ۱۴۰۳، صفحه ۶۵-۷۸

نشریه روش‌های تحلیلی و عددی در مهندسی معدن

تارنمای نشریه: http://anm.yazd.ac.ir/

مقاله پژوهشی

تحلیل اثر نانوذرات در پایداری لوله‌های بتنی متخلخل مدفون حاوی جریان سیال به کمک روش عددی

محمود ربانی بیدگلی[*1]

۱- گروه مهندسی عمران، واحد جاسب، دانشگاه آزاد اسلامی، جاسب، ایران.

(دریافت: دی ۱۴۰۲، پذیرش: اردیبهشت ۱۴۰۳)

چکیده

با توجه به کاربردهای گسترده‌ی لوله‌های بتنی مدفون متخلخل حاوی جریان سیال در زمینهٔ مهندسی عمران، ارائه یک مدل ریاضی مناسب جهت تحلیل پایداری و عملکرد دینامیکی آنها امری اساسی است. در این راستا، یک لوله بتنی مدفون با در نظر گرفتن تخلخل در مصالح بتنی و بستر اطراف تدوین می‌شود که به‌وسیله نانوذرات سیلیس تقویت شده است. سازه با استفاده از المان‌های پوسته استوانه و با بهره‌گیری از تئوری ردی مدل‌سازی می‌شود. برای محاسبه نیروی ناشی از جریان سیال درونی لوله، از معادله ناویراستوکس استفاده می‌گردد. تأثیر نانوذرات در لوله با استفاده از مدل اختلاط مدل‌نمایی می‌شود، و بستر خاک نیز با بهره‌گیری از فنرهای عمودی و لایه‌های برشی شبیه‌سازی می‌گردد. در نهایت، با بهره‌گیری از اصل همیلتون، معادلات حاکم بر سازه استخراج می‌شوند. برای تحلیل سازه از روش عددی المان محدود بزیر استفاده می‌شود و تأثیر پارامترهایی همچون درصد حجمی نانو ذرات، تخلخل بتن، بستر خاک، سیال درون لوله، و پارامترهای هندسی بررسی می‌شود. نتایج حاصل از تحلیل نشان می‌دهند که با افزایش درصد حجمی نانوذرات از صفر به ۳ درصد، بیشینه فرکانس و سرعت بحرانی سیال به ترتیب ۳۵ درصد و ۳۸ درصد افزایش می‌یابد. همچنین، با افزایش تخلخل بتن از صفر به ۰٫۶، فرکانس بیشینه و سرعت بحرانی سیال به ترتیب ۲۶ درصد و ۱۸ درصد کاهش می‌یابد. این نتایج می‌توانند به بهبود در طراحی و بهینه‌سازی لوله‌های بتنی حاوی جریان سیال منجر شوند و در فهم بهتر رفتار دینامیکی این سازه‌ها کمک نمایند.

کلمات کلیدی

لوله بتنی مدفون، معادله ناویر-استوکس، نانو ذرات سیلیس، تخلخل، تئوری برشی مرتبه بالا، روش عددی المان محدود بزیر.

[*] عهده‌دار مکاتبات: *m.rabanibidgoli@yahoo.com*

DOI: 10.22034/ANM.2024.21132.1621

۱- مقدمه

لوله‌های بتنی متخلخل مدفون که با جریان سیال در زیرزمین‌ها یا در محیط‌های متخلخل مورداستفاده قرار می‌گیرند، یکی از ابتکارات حیاتی در سازه‌های زیرسطحی است. بااین‌حال، پایداری و عملکرد بهینه این لوله‌ها در مواجهه با جریان سیال، به مسائلی چندگانه ازجمله تغییر شکلات، خوردگی و کاهش مقاومت سازه مرتبط است. کاربرد آن‌ها در لوله‌های بتنی پارس جنوبی، لوله‌های بتنی به‌عنوان مجرای آب رودخانه، خطوط پمپاژ فاضلاب و ... که سرعت سیال زیاد است، است. در سال‌های اخیر، با پیشرفت‌های حوزه نانوتکنولوژی، افزودن نانوذرات به محیط بتنی به‌منظور بهبود خصوصیات مختلف به یکی از راهکارهای مطالعه و بهبود پایداری لوله‌های بتنی متخلخل مدفون تبدیل شده است. تأثیر نانوذرات بر رفتار مکانیکی و پایداری لوله‌های بتنی متخلخل در شرایط مدفون می‌تواند به‌عنوان یک عامل کلیدی در بهبود عملکرد و پایداری این سازه‌ها مطرح شود. افزودن نانوذرات به ماتریس بتنی متخلخل می‌تواند به تقویت خواص مکانیکی آن‌ها، افزایش مقاومت فشاری و کششی، کاهش نفوذپذیری و جلوگیری از نشت آب در داخل لوله‌ها کمک کند. علاوه بر این، نانوذرات می‌توانند به بهبود پایداری سازه در برابر شرایط محیطی مختلف، ازجمله تغییرات دما و رطوبت، کمک کنند. بااینکه این تأثیرات بستگی به نوع و خصوصیات نانوذرات، میزان مخلوط شوندگی آن‌ها با ماتریس بتنی و شرایط محیطی دارد، اما استفاده از نانوذرات به‌عنوان یک روش مؤثر برای بهبود خواص مکانیکی و پایداری لوله‌های بتنی متخلخل در شرایط مدفون مطرح می‌شود.

ارتعاشات در لوله‌های انتقال سیال به دلیل جریان سیال در لوله رخ می‌دهد. پس از رسیدن به یک مقدار حد بحرانی، این ارتعاشات ممکن است باعث ایجاد ترک و شکست در لوله‌های حاوی جریان سیال شود. این ترک‌ها ممکن است منجر به نشتی شوند که ممکن است حفره‌های فرسایشی در اطراف یا زیر لوله ایجاد کند و درنتیجه باعث خرابی لوله شود. همچنین ترک‌هایی که در خطوط آب آشامیدنی ایجاد می‌شود باعث کاهش قابل‌توجه کیفیت آب شده و سلامت عمومی را تهدید می‌کند. هنگامی‌که مواد قابل اشتعال و احتراق از طریق لوله‌ها حمل می‌شوند، خطرات آتش‌سوزی و انفجار ممکن است به دلیل ترک و شکستگی لوله رخ دهد. جلوگیری از بروز چنین مشکلاتی در خطوط لوله در طول عمر مفید آن‌ها بسیار مهم است؛ بنابراین بررسی رفتار لوله‌های حاوی جریان سیال در شرایط بحرانی ازنظر سلامت انسان، حفاظت از محیط‌زیست، جلوگیری از نشت سیالات و کاهش هزینه‌های نگهداری و تعمیر موضوع مهمی است. در سال‌های اخیر، اندرکنش سیال- سازه به دلیل کاربرد گسترده آن در بسیاری از زمینه‌های مهندسی اهمیت پیدا کرده است. افزایش پایداری لوله‌ها در برابر شرایط محیطی مختلف می‌تواند به‌صورت قابل‌توجهی تأثیرگذار باشد. این افزایش پایداری می‌تواند بهبودی در ایمنی و عمر مفید لوله‌ها ایجاد کند. ازجمله تأثیرات مهم می‌توان به مقاومت بیشتر در برابر فشارهای خارجی ازجمله جریان سیال، افزایش مقاومت در برابر ارتعاشات و نوسانات مکانیکی، کاهش خطر نشت و تخریب و افزایش کارایی و عمر مفید سازه اشاره کرد. این امر به‌ویژه در بخش‌هایی از زیرساخت‌های حیاتی مانند شبکه‌های آبیاری، لوله‌های حمل‌ونقل مواد و مخازن ذخیره‌سازی مواد، اهمیت بیشتری پیدا می‌کند. ازاین‌رو، به‌طورکلی، افزایش پایداری لوله‌ها می‌تواند به بهبود ایمنی، کارایی و هزینه‌های نگهداری و تعمیرات آن‌ها کمک کند.

پوسته‌ها و لوله‌های استوانه‌ای به دلیل ویژگی‌های منحصربه‌فرد و ساختارهای خاصی که دارند، در رشته‌های مختلف مهندسی، به‌ویژه عمران، کاربردهای گسترده‌ای دارند. به‌عنوان‌مثال سازه‌های تحت‌فشار داخلی، لوله‌های فاضلاب و آب، سازه‌های نفتی و گازی، پل‌های تحت پوسته، مخازن فرآیندهای صنعتی، سازه‌های هوافضا، پوشش‌های ساختمانی و سیلوها و انبارها. تمام این کاربردها نشان از اهمیت بالای پوسته‌ها و لوله‌های استوانه‌ای در عمران و صنعت دارند که بهبود در طراحی و استفاده از آن‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. ارتعاشات غیرخطی و پدیده‌های خمش در پوسته‌های استوانه‌ای در سال‌های اخیر موضوعی از توجه تحقیقاتی قابل‌توجه بوده است. این مقدمه یک مرور کلی از مطالعات کلیدی ارائه می‌دهد که به‌طور قابل‌توجهی به درک رفتار پویا و پاسخ ساختاری پوسته‌های استوانه‌ای کمک کرده‌اند. این تحقیقات متنوع، جوانب گوناگونی را شامل می‌شود؛ از ارتعاشات غیرخطی تا خمش‌های پویا و دربرگیرنده‌ی مواد و شرایط بارگذاری مختلف می‌شود. علیجانی و امابیلی [۱] یک بررسی جامع از ادبیات را از سال‌های ۲۰۰۳ تا ۲۰۱۳ انجام دادند که نگاهی ارزشمند به ارتعاشات غیرخطی پوسته‌ها ارائه داد. گونکالوس و همکاران [۲] به دنیای تغییرات محدود، با تمرکز بر پوسته‌های

استوانه‌ای با تنش اولیه تحت‌فشار داخلی، پرداختند و اطلاعات حیاتی درباره رفتار این ساختارها ارائه کردند. به‌عنوان گام بزرگ‌تر، دائو وان دونگ و له خا هوا [۳] به تحقیق در زمینه خمش پویا تاب‌زنگی مواد متشکل استوانه‌ای گرد با پشته‌ای الاستیک اختصاص‌یافته، پرداختند. برسلاوسکی و همکاران [۴] رفتار استاتیک و دینامیک پوسته‌های استوانه‌ای دایره‌ای از مواد شریانی هیپرالاستیک را بررسی کردند و دیدی منحصربه‌فرد از تأثیر خصوصیات مواد ارائه دادند. امابیلی و برسلاوسکی [۵] یک بار فشار وابسته به جابه‌جا برای خمش متناهی پوسته‌ها و صفحات معرفی کردند که یک چارچوب برای درک اثرات فشار در حین خمش‌های بزرگ ارائه می‌کند. چن و لی [۶] تحقیقی را در مورد پتوپت‌های غیرخطی و پاسخ‌های پویا پوسته‌های استوانه‌ای لایه‌ای در جریان هوای فوق‌صوتی انجام دادند و به درک رفتار هوافضایی کمک کردند. ارتیگوسا و ژیل [۷] یک چارچوب محاسباتی برای الکترومکانیک غیرفشرده بر اساس انرژی‌های کرنری چندمتغیره ارائه دادند که یک پایه برای مطالعه نظریه دقیق هندسی پوسته فراهم می‌کند. لیو و همکاران [۸] بر مدل‌سازی مکانیکی ویژگی‌های پویا پوسته‌های استوانه‌ای ترموالکتریک لایه‌ای تمرکز کردند و امکانات این مواد در کاربردهای پویا را بررسی کردند. وانگ و همکاران [۹] خمش‌های الاستیک خطی و غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای شکل تخم‌مرغی ساخته‌شده از رزین استریولیتوگرافی تحت فشار خارجی را موردبررسی قرار دادند و بینش‌هایی در مورد رفتار خمشی اشکال غیرمعمول ارائه دادند. مهر و همکاران [۱۰] یک تجزیه‌وتحلیل خمش عددی از ساختار پوسته‌ای تخته کامپوزیت مهارشده با نانولوله‌های کربنی تحت بار حرارتی انجام دادند و پتانسیل مواد نانوکامپوزیت را بررسی کردند. شیانگ و همکاران [۱۱] به تجزیه‌وتحلیل ارتعاش آزاد پنل‌های پوسته‌ای مخروطی-FG CNTRC با استفاده از روش اجزای آزاد کرنل پارتیت ریتس پرداختند و به درک ویژگی‌های ارتعاشی کمک کردند. لطفان و همکاران [۱۲] یک مدل عالی برای تحلیل ارتعاش ساختارهای پوسته‌ای دوگانه منحنی با حرکت محوری ارائه دادند و به مطالعه هندسه‌های پوسته پیچیده و پاسخ‌های پویا آن‌ها کمک کردند. تحلیل ارتعاش آزاد و اجباری پوسته‌های استوانه‌ای لایه‌ای توسط وو و همکاران انجام شد [۱۳]. نکویی و همکاران به تحلیل پایداری پوسته‌های استوانه‌ای لایه‌ای تقویت‌شده با الیاف حافظه‌دار شکلی پرداختند [۱۴]. این مجموعه از تحقیقات نمایانگر یک تابلوی غنی از تلاش‌های تحقیقاتی است که به‌طور جمعی به درک ارتعاشات غیرخطی و خمش در پوسته‌های استوانه‌ای پیشرفت کرده‌اند. بخش‌های بعدی این کار به بررسی عمیق هر تحقیق می‌پردازند و با تحلیل جزئیات روش‌ها، یافته‌ها و پیامدهای آن‌ها برای حوزه گسترده‌تر مکانیک سازه و طراحی می‌پردازند.

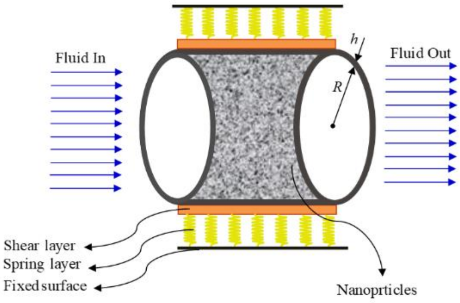
پوسته‌های استوانه‌ای حاوی جریان سیال یکی از حوزه‌های پراهمیت در مهندسی سازه است که به دلیل تنوع وسیع کاربردها، موضوع موردتوجه‌ی در زمینه تحقیقات و پژوهش‌های مهندسی سازه قرار گرفته است. این سازه‌ها به‌عنوان پوسته‌های نازک با شکل استوانه‌ای در معماری و صنعت مختلف به کار گرفته می‌شوند، ازجمله مخازن، لوله‌ها، تانک‌های ذخیره‌سازی و سازه‌های نفتی. تحلیل و طراحی این نوع پوسته‌ها، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است زیرا ویژگی‌های مکانیکی و دینامیکی آن‌ها تحت تأثیر جریان سیال، بارهای خارجی و شرایط محیطی متغیر قرار می‌گیرد. این مقاله به مطالعه پوسته‌های استوانه‌ای حاوی جریان سیال می‌پردازد و به‌منظور بهبود درک و کنترل عملکرد این سازه‌ها، از روش‌های تحلیلی و عددی بهره می‌برد. با توجه به اهمیت این سازه‌ها در صنعت و ساخت‌وساز، بررسی تأثیر جریان سیال بر ویژگی‌های مکانیکی و دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای از اهمیت بسیاری برخوردار است که نتایج حاصل از این تحقیقات می‌تواند به بهینه‌سازی طراحی و استفاده از این سازه‌ها در عمل کمک کند. در زمینه مکانیک سازه و تعامل سیال-سازه، رفتار پویا لوله‌های حاوی سیال موضوعی موردتوجه قرار گرفته است. درک دقیق از پویایی پیچیده این سازه‌ها برای کاربردهای مختلف مهندسی بسیار حیاتی است. این مقدمه یک بررسی کلی از تحقیقات کلیدی ارائه می‌دهد که به درک پاسخ پویا لوله‌های حاوی سیال تحت شرایط بارگذاری متنوع کمک کرده‌اند. صادقی و کریمی دانا [۱۵] یک مطالعه در مورد رفتار پویا لوله حاوی سیال تحت تأثیر جرم به‌صورت متحرک ارائه دادند. از روش المان محدود و یک رویکرد فضای حالت، آن‌ها به بررسی تعاملات پیچیده بین جریان سیال و پاسخ سازه پرداختند و نوری انداختند بر تأثیرات بارگذاری پویا. میرمضانی و همکاران [۱۶] ارتعاشات غیرمحلی لوله‌های نوع پوسته‌ای حاوی نانو لوله‌های کربنی در حال حاکمی جریان داخلی و خارجی را بررسی کردند. مطالعه آن‌ها شرایط لغزش را در نظر گرفت و

به تفصیل در ویژگی‌های ارتعاشی سازه‌های مبتنی بر نانولوله کربنی که سیال را حمل می‌کنند، می‌پردازد. این کار به درک اثرات ترکیبی جریان‌های داخلی و خارجی بر رفتار ارتعاشی پوسته‌های چنین سازه‌هایی کمک می‌کند. شنگ و نگ [۱۷] پاسخ غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای حاوی سیال با خواص متغیر در ترکیب با بارگذاری مکانیکی و حرارتی مشخص کردند. این مطالعه رفتار پوسته‌ها با خواص متغیر را بررسی کرد و به درک اثرات مواد تابعی در روی پاسخ سازه‌های استوانه‌ای حاوی سیال کمک کرد. دورموس و همکاران به مقایسه و تحلیل ارتعاش آزاد لوله با مصالح ترکیبی حاوی سیال واقع بر خاک با مدل دو پارامتر پرداختند [۱۸]. ما و همکاران [۱۹] به تحلیل پایداری لوله حاوی سیال واقع بر فونداسیون دو پارامتری با شرایط مرزی تکیه‌گاهی الاستیک پرداختند. تحلیل ایزولاسیون ارتعاش لوله حاوی سیال پیزوالکتریک متشکل از مواد مرکب لایه‌ای تقویت‌شده با الیاف توسط لیانگ و همکاران انجام شد [۲۰]. ایشان نتیجه گرفتند که استفاده از سیستم کنترل بازخورد با پیزوالکتریک سبب افزایش فرکانس طبیعی و پایداری لوله حاوی سیال می‌شود. فو و همکاران [۲۱] رفتار دینامیکی لوله‌های مدرج تابعی محوری حاوی جریان دوفازه سیال- گاز را تحلیل نمودند. تحلیل سه‌بعدی ارتعاش در لوله‌های انحنادار حاوی سیال با المان سیال انحنادار و لوله مستقیم توسط ون و همکاران انجام شد [۲۲].

با توجه به تحقیقات انجام‌شده تاکنون، مطالعه‌ای در خصوص تجزیه‌وتحلیل پدیده‌های پایداری و ارتعاشات لوله‌های بتنی متخلخل مدفون که به‌وسیله نانوذرات تقویت شده‌اند، انجام نگرفته است. در این تحقیق، از قانون اختلاط برای محاسبه خواص مکانیکی نانوکامپوزیت‌ها استفاده خواهد شد. برای شبیه‌سازی بستر خاک، از فنرهای عمودی و یک‌لایه برشی استفاده شده است. تحلیل دینامیکی غیرخطی با استفاده از روش عددی المان محدود انجام شده و از تئوری برشی مرتبه بالا برای توصیف رفتار مکانیکی سازه استفاده شده است. در این تحقیق، با بهره‌گیری از روش عددی، فرکانس‌های غیرخطی و سرعت بحرانی سیال محاسبه می‌شوند. تأثیر عوامل متغیری چون درصد حجمی نانوذرات، سرعت جریان سیال، تخلخل، بستر خاک و جزئیات هندسی لوله بر روی رفتار مکانیکی پایداری سازه موردبررسی قرار خواهد گرفت. امید است که نتایج این تحقیق به‌عنوان یک پایگاه مفید در پیشبرد دانش در این زمینه موردتوجه قرار گیرد و به‌عنوان یک منبع قوی و اعتبارسنج برای تحلیل دینامیکی لوله‌های بتنی با جریان سیال، به‌شمار بیاید.

۲- مدل‌سازی ریاضی سازه

شکل ۱ یک لوله بتنی متخلخل تقویت‌شده با نانوذرات مدفون در بستر خاک حاوی جریان سیال نشان داده شده است. طول لوله بتنی L، شعاع میانگین R و ضخامت لوله h است. بستر خاک با فنرهای عمودی وینکلر و لایه برشی پاسترناک مدل شده است.



شکل ۱: شماتیک لوله بتنی متخلخل مدفون تقویت‌شده با نانو ذرات حاوی جریان سیال.

۲-۱- روابط کرنش-تغییر مکان

طبق تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالای ردی، میدان جابجایی در سه راستای طولی، محیطی و شعاعی به ترتیب عبارت است از [۲۳]:

$$u_1(x,\theta,z,t)=U(x,\theta,t)+z\,\phi_x(x,\theta,t) -\frac{4z^3}{3h^2}\left(\phi_x(x,\theta,t)+\frac{\partial}{\partial x}W(x,\theta,t)\right), \qquad (۱)$$

$$u_2(x,\theta,z,t)=V(x,\theta,t)+z\,\phi_\theta(x,\theta,t) -\frac{4z^3}{3h^2}\left(\phi_\theta(x,\theta,t)+\frac{\partial}{R\partial\theta}W(x,\theta,t)\right), \qquad (۲)$$

$$u_3(x,\theta,z,t)=W(x,\theta,t), \qquad (۳)$$

جایی که u، v و w جابجایی‌های سطح میانی به ترتیب در سه راستای طولی، محیطی و شعاعی می‌باشند. همچنین ϕ_x و ϕ_θ بیانگر شیب‌های صفحه عمود بر سطح میانی در $z=0$ هستند. به کمک روابط بالا، روابط کرنش-تغییر مکان به فرم زیر است:

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+z\,\frac{\partial \phi_x}{\partial x} +z^3\,\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right), \qquad (۴)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\partial V}{R\partial\theta} + \frac{W}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{R\partial\theta}\right)^2 + z\,\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta} + z^3\,\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta} + \frac{\partial^2 W}{R^2\partial\theta^2}\right), \tag{۵}$$

$$\varepsilon_{x\theta} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{R\partial\theta} + \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial W}{R\partial\theta} + z\left(\frac{\partial\phi_x}{R\partial\theta} + \frac{\partial\phi_\theta}{\partial x}\right) - \frac{4z^2}{h^2}\left(\phi_x + \frac{\partial W}{\partial x}\right) - \frac{4z^3}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{\partial x} + \frac{\partial\phi_x}{R\partial\theta} + 2\frac{\partial^2 W}{R\partial x\,\partial\theta}\right), \tag{۶}$$

$$\varepsilon_{xz} = \phi_x + \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{4z^2}{h^2}\left(\varphi_x + \frac{\partial W}{\partial x}\right), \tag{۷}$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \phi_\theta + \frac{\partial W}{R\partial\theta} - \frac{4z^2}{h^2}\left(\phi_\theta + \frac{\partial W}{R\partial\theta}\right) \tag{۸}$$

۲-۲- روابط تنش-کرنش

با فرض الاستیک بودن سازه، آنهاهای تنش-کرنش برای لوله بتنی متخلخل مدفون عبارت است از:

$$\sigma_{xx} = C_{11}\left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + z\,\frac{\partial\phi_x}{\partial x} + z^3\,\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\right] + C_{12}\left[\frac{\partial V}{R\partial\theta} + \frac{W}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{R\partial\theta}\right)^2 + z\,\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta} + z^3\,\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta} + \frac{\partial^2 W}{R^2\partial\theta^2}\right)\right], \tag{۹}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = C_{21}\left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + z\,\frac{\partial\phi_x}{\partial x} + z^3\,\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\right] + C_{22}\left[\frac{\partial V}{R\partial\theta} + \frac{W}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{R\partial\theta}\right)^2 + z\,\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta} + z^3\,\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta} + \frac{\partial^2 W}{R^2\partial\theta^2}\right)\right], \tag{۱۰}$$

$$\sigma_{x\theta} = C_{66}\left[\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{R\partial\theta} + \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial W}{R\partial\theta} + z\left(\frac{\partial\phi_x}{R\partial\theta} + \frac{\partial\phi_\theta}{\partial x}\right) - \frac{4z^2}{h^2}\left(\phi_x + \frac{\partial W}{\partial x}\right) - \frac{4z^3}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{\partial x} + \frac{\partial\phi_x}{R\partial\theta} + 2\frac{\partial^2 W}{R\partial x\,\partial\theta}\right)\right], \tag{۱۱}$$

$$\sigma_{xz} = C_{55}\left[\phi_x + \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{4z^2}{h^2}\left(\varphi_x + \frac{\partial W}{\partial x}\right)\right], \tag{۱۲}$$

$$\sigma_{\theta z} = C_{44}\left[\phi_\theta + \frac{\partial W}{R\partial\theta} - \frac{4z^2}{h^2}\left(\phi_\theta + \frac{\partial W}{R\partial\theta}\right)\right]. \tag{۱۳}$$

جایی که C_{ij} ثوابت الاستیک لوله تقویت‌شده با نانوذرات است. با توجه به اینکه لوله بتنی، متخلخل است، بنابراین ثوابت الاستیک و دانسیته لوله مطابق روابط زیر تغییر می‌کنند [۲۴]:

$$C_{ij}(z) = C_{ijc}\left[1 - e_0\psi(z)\right], \tag{۱۴}$$

$$\rho(z) = \rho_c\left[1 - e_m\psi(z)\right], \tag{۱۵}$$

جایی که ρ_c و C_{ijc} به ترتیب بیشینه دانسیته و ثوابت الاستیک بوده و e_0 و $e_m = 1 - \sqrt{1 - e_0}$ ثوابت تخلخل در سازه می‌باشند. با توجه به اینکه لوله بتنی با نانوذرات سیلیس تقویت‌شده است، بنابراین از مدل اختلاط برای محاسبه خواص معادل سازه استفاده می‌شود. طبق قانون اختلاط داریم:

$$C_{ijc} = \left(1 - V_N\right)C_{ijP} + V_N C_{ijN}, \tag{۱۶}$$

$$\rho_c = \left(1 - V_N\right)\rho_P + V_N\,\rho_N, \tag{۱۷}$$

جایی که اندیس‌های P و N به ترتیب برای لوله و نانوذرات است و V_N درصد حجمی نانوذرات را نشان می‌دهد.

۲-۳- روش انرژی

در این بخش، انرژی پتانسیل، جنبشی و کار نیروهای خارج وارد بر سازه بیان می‌شود. انرژی پتانسیل لوله بتنی متخلخل مدفون تقویت‌شده با نانوذرات عبارت است از:

$$U = \frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\int_{-h/2}^{h/2}\begin{pmatrix}\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta\theta} + \sigma_{x\theta}\gamma_{x\theta} \\ +\sigma_{xz}\gamma_{xz} + \sigma_{\theta z}\gamma_{\theta z}\end{pmatrix}dV \tag{۱۸}$$

با جایگذاری کرنش‌ها از روابط (۴) تا (۸) در رابطه بالا داریم:

$$\begin{aligned}U = \frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\Bigg(& N_{xx}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right) + M_{xx}\,\frac{\partial\varphi_x}{\partial x} \\ & + N_{\theta\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial\theta} + \frac{W}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{R\partial\theta}\right)^2\right) + Q_\theta\left(\frac{\partial W}{R\partial\theta} + \varphi_\theta\right) \\ & + Q_x\left(\frac{\partial W}{\partial x} + \varphi_x\right) + N_{x\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{R\partial\theta} + \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial W}{R\partial\theta}\right) \\ & + M_{\theta\theta}\frac{\partial\varphi_\theta}{R\partial\theta} + M_{x\theta}\left(\frac{\partial\varphi_x}{R\partial\theta} + \frac{\partial\varphi_\theta}{\partial x}\right) \\ & + L_\theta\left(\frac{-4}{h^2}\left(\varphi_\theta + \frac{\partial W}{R\partial\theta}\right)\right) + L_x\left(\frac{-4}{h^2}\left(\varphi_x + \frac{\partial W}{\partial x}\right)\right) \\ & + R_{xx}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\right) \\ & + R_{\theta\theta}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\varphi_\theta}{R\partial\theta} + \frac{\partial^2 W}{R^2\partial\theta^2}\right)\right) \\ & + R_{x\theta}\left(\frac{\partial\varphi_\theta}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_x}{R\partial\theta} + 2\frac{\partial^2 W}{R\partial x\,\partial\theta}\right)\Bigg)dx\,d\theta,\end{aligned} \tag{۱۹}$$

که

$$\begin{bmatrix}N_{xx} & M_{xx} & R_{xx} \\ N_{\theta\theta} & M_{\theta\theta} & R_{\theta\theta} \\ N_{x\theta} & M_{x\theta} & R_{x\theta}\end{bmatrix} = \int_{h/2}^{h/2}\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xx}z & \sigma_{xx}z^3 \\ \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta\theta}z & \sigma_{\theta\theta}z^3 \\ \sigma_{x\theta} & \sigma_{x\theta}z & \sigma_{x\theta}z^3\end{bmatrix}dz, \tag{۲۰}$$

$$\begin{bmatrix} Q_x & R_x \\ Q_\theta & R_\theta \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} & \sigma_{xz} z^2 \\ \sigma_{\theta z} & \sigma_{\theta z} z^2 \end{bmatrix} dz . \qquad (۲۱)$$

انرژی جنبشی لوله بتنی متخلخل مدفون تقویت‌شده با نانوذرات به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$K = \frac{\rho}{2}\int_{\Omega_0}\int_{-h/2}^{h/2}\left((\dot{u}_1)^2 + (\dot{u}_2)^2 + (\dot{u}_3)^2\right)dV , \qquad (۲۲)$$

که ρ از رابطه (۱۷) محاسبه می‌شود. کار نیروهای خارجی شامل دو بخش است. بخش اول مربوط به سیال عبوری از داخل لوله و بخش دوم مربوط به نیروهای وارده از طرف خاک به سازه است.

- نیروی سیال داخل لوله

با فرض جریان آرام داخل لوله و سیال ویسکوز و غیرقابل تراکم به کمک معادله ناویر استوکس داریم [۱۵]:

$$\rho_f \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \mathbf{P} + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{F}_{body}, \qquad (۲۳)$$

در رابطه فوق $\mathbf{V}$ بردار سرعت سیال است که فقط در راستای طولی مدنظر است. همچنین $\mathbf{P}$ ، μ و ρ_f به ترتیب فشار هیدرودینامیکی، ویسکوزیته و دانسیته سیال بوده و $\mathbf{F}_{body}$ نیروی حجمی است. در رابطه بالا، عملگر مشتق کامل با فرض سیال طولی به فرم زیر است:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x}, \qquad (۲۴)$$

با استفاده از رابطه (۲۳) و (۲۴)، نیروی ناشی از سیال عبارت است از:

$$\begin{aligned} P_{Fluid} &= \frac{\partial p_z}{\partial z} = -\rho_f h_f \left(\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2V_x \frac{\partial^2 W}{\partial x \, \partial t} \right. \\ &\left. + V_x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 W}{R^2 \partial \theta^2 \partial t} \right. \\ &\left. + V_x \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 W}{R^2 \partial \theta^2 \partial x} \right) \right). \end{aligned} \qquad (۲۵)$$

و کار نیروی ناشی از سیال داخل لوله عبارت است از:

$$W_F = \int_0^L (P_{Fluid}) w dA , \qquad (۲۶)$$

- نیروی ناشی از خاک اطراف لوله

بستر خاک اطراف لوله بتنی به کمک فنر عمودی و لایه برشی شبیه‌سازی‌شده است.

بنابراین، کار نیروی ناشی از خاک روی لوله عبارت است از:

$$W_S = \int_0^L \left(k_w w + k_g \nabla^2 w \right) w dA, \qquad (۲۷)$$

k_w و k_g به ترتیب ضریب فنر و برش بستر خاک است.

۲-۴- معادلات حاکم

برای به دست آوردن معادلات حاکم بر سازه، اصل همیلتون استفاده می‌شود. اصل همیلتون عبارت است از:

$$\int_0^t (\delta U - \delta K - \delta W_F - \delta W_S) dt = 0. \qquad (۲۸)$$

با جایگذاری روابط (۱۹)، (۲۲)، (۲۶) و (۲۷) در رابطه (۲۸) و استفاده از انتگرال جزءبه‌جزء، پنج معادله حاکم بر سازه به فرم زیر استخراج می‌شوند:

$$\begin{aligned} \delta u : &\frac{\partial}{\partial x}\left[A_{11}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 \right) + B_{11}\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x}\right) \right. \\ &\left. + A_{12}\left(\frac{\partial V}{R\partial \theta} + \frac{W}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{R\partial \theta}\right)^2 \right) \right] \\ &+ B_{66}\left(\frac{\partial \phi_x}{R\partial \theta} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{\partial}{R\partial \theta}\left[A_{66}\left(\frac{\partial U}{R\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial W}{R\partial \theta} \right) + \right. \\ &\left. + E_{66}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial \phi_\theta}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{R\partial \theta} + 2\frac{\partial^2 W}{R\partial x\,\partial \theta} \right)\right) \right] = \\ &I_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + J_1 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} - \frac{4I_3}{h^2}\frac{\partial^3 W}{\partial t^2 \partial x}, \end{aligned} \qquad (۲۹)$$

$$\begin{aligned} \delta v : &\frac{\partial}{\partial x}\left[A_{66}\left(\frac{\partial U}{R\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial W}{R\partial \theta} \right) \right. \\ &+ B_{66}\left(\frac{\partial \phi_x}{R\partial \theta} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial x} \right) + \\ &\left. E_{66}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial \phi_\theta}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{R\partial \theta} + 2\frac{\partial^2 W}{R\partial x\,\partial \theta} \right)\right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{R\partial \theta}\left[A_{12}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 \right) \right. \\ &+ A_{22}\left(\frac{\partial V}{R\partial \theta} + \frac{W}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{R\partial \theta}\right)^2 \right) + B_{12}\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x}\right) \\ &+ B_{22}\left(\frac{\partial \phi_\theta}{R\partial \theta}\right) + E_{12}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)\right) \\ &\left. + E_{22}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial \phi_\theta}{R\partial \theta} + \frac{\partial^2 W}{R^2\partial \theta^2} \right)\right) \right] \\ &= I_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + J_1 \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial t^2} - \frac{4I_3}{h^2}\frac{\partial^3 W}{R\partial t^2 \partial \theta}, \end{aligned} \qquad (۳۰)$$

$$
\begin{aligned}
&\delta w:\frac{\partial}{\partial x}\left[A_{44}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi_x\right)+D_{44}\left(\frac{-4}{h^2}\left(\psi_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right)\right]\\
&+\frac{\partial}{R\partial\theta}\left[A_{55}\left(\frac{\partial w}{R\partial\theta}+\psi_\theta\right)+D_{55}\left(\frac{-4}{h^2}\left(\psi_\theta+\frac{\partial w}{R\partial\theta}\right)\right)\right]-\\
&\frac{4}{h^2}\left(\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}(D_{44}\left(\frac{\partial W}{\partial x}+\phi_x\right)+F_{44}\left(\frac{-4}{h^2}\left(\phi_x+\frac{\partial W}{\partial x}\right)\right))\\&+\frac{\partial}{R\partial\theta}(D_{55}\left(\frac{\partial W}{R\partial\theta}+\phi_\theta\right)+F_{55}\left(\frac{-4}{h^2}\left(\phi_\theta+\frac{\partial W}{R\partial\theta}\right)\right))\end{aligned}\right)+\\
&\frac{4}{3h^2}\left(\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x^2}(E_{11}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right)+E_{12}\left(\frac{\partial V}{R\partial\theta}+\frac{W}{R}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{R\partial\theta}\right)^2\right)\\
&+F_{11}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x}\right)+F_{12}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta}\right)+H_{11}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\right)\\
&+H_{12}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta}+\frac{\partial^2 W}{R^2\partial\theta^2}\right)\right))\\
&+2\frac{\partial^2}{R\partial x\partial\theta}(E_{66}\left(\frac{\partial U}{R\partial\theta}+\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial W}{R\partial\theta}\right)\\
&+F_{66}\left(\frac{\partial\phi_x}{R\partial\theta}+\frac{\partial\phi_\theta}{\partial x}\right)+H_{66}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{\partial x}+\frac{\partial\phi_x}{R\partial\theta}+2\frac{\partial^2 W}{R\partial x\partial\theta}\right)\right))\\
&+\frac{\partial^2}{R^2\partial\theta^2}(E_{12}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right)+E_{22}\left(\frac{\partial V}{R\partial\theta}+\frac{W}{R}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{R\partial\theta}\right)^2\right)\\
&+F_{12}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x}\right)+F_{22}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta}\right)+H_{12}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\right)\\
&+H_{22}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta}+\frac{\partial^2 W}{R^2\partial\theta^2}\right)\right))
\end{aligned}\right)\\
&-\frac{1}{R}(A_{12}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right)+A_{22}\left(\frac{\partial V}{R\partial\theta}+\frac{W}{R}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{R\partial\theta}\right)^2\right)\\
&+B_{12}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x}\right)+B_{22}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta}\right)+E_{12}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\right)\\
&+E_{22}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta}+\frac{\partial^2 W}{R^2\partial\theta^2}\right)\right))+F_{Fluid}=\\
&I_0\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}-\left(\frac{4}{3h^2}\right)^2 I_6\left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 W}{R^2\partial\theta^2\partial t^2}\right)\\
&+\frac{4}{3h^2}\left(I_3\frac{\partial^3 U}{\partial t^2\partial x}+I_3\frac{\partial^3 V}{R\partial t^2\partial\theta}+J_4\left(\frac{\partial^3\phi_x}{\partial t^2\partial x}+\frac{\partial^3\phi_\theta}{R\partial t^2\partial\theta}\right)\right),
\end{aligned}
\qquad (۳۱)
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta\phi_x:\frac{\partial}{\partial x}(B_{11}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right)+D_{11}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x}\right)\\
&+B_{12}\left(\frac{\partial V}{R\partial\theta}+\frac{W}{R}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{R\partial\theta}\right)^2\right)\\
&+D_{12}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta}\right)+F_{11}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\right)\\
&+F_{12}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta}+\frac{\partial^2 W}{R^2\partial\theta^2}\right)\right))+\\
&\frac{\partial}{R\partial\theta}(B_{66}\left(\frac{\partial U}{R\partial\theta}+\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial W}{R\partial\theta}\right)\\
&+D_{66}\left(\frac{\partial\phi_x}{R\partial\theta}+\frac{\partial\phi_\theta}{\partial x}\right)\\
&+F_{66}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{\partial x}+\frac{\partial\phi_x}{R\partial\theta}+2\frac{\partial^2 W}{R\partial x\partial\theta}\right)\right))\\
&-\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial R_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial R_{x\theta}}{R\partial\theta}\right)-Q_x+\frac{4}{h^2}L_x\\
&=J_1\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+K_2\frac{\partial^2\phi_x}{\partial t^2}-\frac{4}{3h^2}J_4\frac{\partial^3 W}{\partial t^2\partial x},
\end{aligned}
\qquad (۳۲)
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta\phi_\theta:\frac{\partial}{\partial x}((B_{66}\left(\frac{\partial U}{R\partial\theta}+\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial W}{R\partial\theta}\right)\\
&+D_{66}\left(\frac{\partial\phi_x}{R\partial\theta}+\frac{\partial\phi_\theta}{\partial x}\right)+F_{66}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{\partial x}+\frac{\partial\phi_x}{R\partial\theta}+2\frac{\partial^2 W}{R\partial x\partial\theta}\right)\right))\\
&+\frac{\partial}{R\partial\theta}(B_{12}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right)+\\
&B_{22}\left(\frac{\partial V}{R\partial\theta}+\frac{W}{R}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{R\partial\theta}\right)^2\right)+D_{12}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x}\right)\\
&+D_{22}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta}\right)+F_{12}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\right)\\
&+F_{22}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta}+\frac{\partial^2 W}{R^2\partial\theta^2}\right)\right))-\\
&\frac{4}{3h^2}\left(\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}(E_{66}\left(\frac{\partial U}{R\partial\theta}+\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial W}{R\partial\theta}\right)+F_{66}\left(\frac{\partial\phi_x}{R\partial\theta}+\frac{\partial\phi_\theta}{\partial x}\right)\\
&+H_{66}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{\partial x}+\frac{\partial\phi_x}{R\partial\theta}+2\frac{\partial^2 W}{R\partial x\partial\theta}\right)\right))\\
&+\frac{\partial}{R\partial\theta}(E_{12}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right)+\\
&E_{22}\left(\frac{\partial V}{R\partial\theta}+\frac{W}{R}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{R\partial\theta}\right)^2\right)+F_{12}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x}\right)\\
&+F_{22}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta}\right)+H_{12}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\right)\\
&+H_{22}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta}+\frac{\partial^2 W}{R^2\partial\theta^2}\right)\right))
\end{aligned}\right)\\
&-(A_{55}\left(\frac{\partial w}{R\partial\theta}+\psi_\theta\right)+D_{55}\left(\frac{-4}{h^2}\left(\psi_\theta+\frac{\partial w}{R\partial\theta}\right)\right))\\
&+\frac{4}{h^2}(D_{55}\left(\frac{\partial W}{R\partial\theta}+\phi_\theta\right)+F_{55}\left(\frac{-4}{h^2}\left(\phi_\theta+\frac{\partial W}{R\partial\theta}\right)\right))\\
&=J_1\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+K_2\frac{\partial^2\phi_\theta}{\partial t^2}-\frac{4}{3h^2}J_4\frac{\partial^3 W}{R\partial t^2\partial\theta},
\end{aligned}
\qquad (۳۳)
$$

جایی که

$$I_i=\int_{-h/2}^{h/2}\rho z^i dz \qquad (i=0,1,\dots,6), \qquad (۳۴)$$

$$J_i=I_i-\frac{4}{3h^2}I_{i+2} \qquad (i=1,4), \qquad (۳۵)$$

$$K_2=I_2-\frac{8}{3h^2}I_4+\left(\frac{4}{3h^2}\right)^2 I_6, \qquad (۳۶)$$

۵-۲- حل عددی

روش بزیر یک روش عددی است که در تحلیل سازه‌ها و مسائل مکانیکی مورداستفاده قرار می‌گیرد. در این روش، از منحنی‌ها و سطوح هندسی اصلی که برای توصیف شکل اشیاء استفاده می‌شوند، به‌عنوان عناصر اصلی در مدل‌سازی استفاده می‌شود. این روش با استفاده از منحنی‌های B-Spline، NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline) و مدل‌های هندسی مشابه، توصیف دقیق‌تری از هندسه‌ها را در اختیار محل تحلیل قرار می‌دهد. با استفاده از المان‌های محدود ایزوژئومتریک، می‌توان به‌طور دقیق‌تر به مدل‌سازی

اشیاء پیچیده پرداخت و به تحلیل رفتار مکانیکی آن‌ها پرداخت. این روش امکان ترکیب دقت هندسی با قابلیت‌های تحلیلی المان محدود را فراهم می‌کند. از تابع‌های ایزوژئومتریکی یا تابع B-Spline در فضای یک‌بعدی می‌توان به‌صورت زیر استفاده نمود [۲۵]:

$$N_i(u)=1/6[(1-u)^3, 3u^3-6u^2+4, -3u^3+3u^2+3u+1, u^3], \quad (۳۷)$$

که Ni(u) تابع B-Spline برای عنصر i است و u متغیر پارامتری بین ۰ تا ۱ است. برای محاسبه ژاکوبین و ماتریس سفتی که برای محاسبه تنش‌ها و متغیرهای مکانیکی به کار می‌روند، می‌توان از توابع ایزوژئومتریکی استفاده کرد .در روش المان محدود، ماتریس جاکوبی برای هر المان محاسبه می‌شود. این ماتریس نسبت میان تغییرات مکانیکی و هندسی از منطقه محاسبه‌شده را نمایش می‌دهد. در روش ایزوژئومتریک، توابع ایزوژئومتریک مثل B-Spline برای تعیین شکل منطقه المان‌ها استفاده می‌شوند. معمولاً ماتریس جاکوبی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J=\frac{\partial x}{\partial \xi}, \quad (۳۸)$$

جایی که J ماتریس ژاکوبین، x بردار موقعیت فیزیکی و ξ بردار پارامتری مرتبط با توابع ایزوژئومتریک است. این ماتریس نشان‌دهنده تغییر مقیاس و جهت در منطقه‌ای از اشیاء مدل‌سازی شده توسط المان است. ماتریس سیفی درواقع نسبت میان تغییرات شکل هندسی و مکانیکی از منطقه‌ای از اشیاء را نمایش می‌دهد. این ماتریس به ما اطلاع می‌دهد که چگونه منطقه مورد مدل‌سازی تغییر می‌کند و به چه تغییرات مکانیکی پاسخ می‌دهد. ماتریس سیفی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F=\frac{\partial X}{\partial x}, \quad (۳۹)$$

جای که F ماتریس سیفی، x بردار موقعیت فیزیکی و X بردار موقعیت مرجع (موقعیت اولیه) است. این ماتریس نشان‌دهنده تغییرات شکل اشیاء است.

بردار گره Ξ مجموعه‌ای از مقادیر واقعی بدون کاهش است که مجموعه‌ای از مختصات را در فضای پارامتری تشکیل می‌دهد:

$$\Xi=\left[\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_{n+p+1}\right], \quad (۴۰)$$

که n تعداد توابع پایه و p ترتیب B-spline است. بردار گره به‌صورت یکنواخت گفته می‌شود اگر گره‌های آن باشند با فاصله یکنواخت و در غیر این صورت غیریکنواخت. علاوه بر این، اگر اولین و آخرین گره آن تکرار شود، بردار گره $p+1$ مرتبه باز می‌شود. توابع پایه تشکیل‌شده از بردارهای گره باز، درون‌یابی در انتهای بازه پارامتری $\left[\xi_1,\xi_{n+p+1}\right]$ هستند؛ اما به‌طورکلی در گره‌های داخلی درون‌یابی لازم نیست. توابع پایه B-Spline به‌صورت بازگشتی با $p=0$ شروع می‌شوند:

$$N_{i,0}(\xi)=\begin{cases}1 & if\ \ \xi_i\le\xi\le\xi_{i+1}\\ 0 & otherwise\end{cases} \quad (۴۱)$$

و برای $p\ge 1$

$$N_{i,p}(\xi)=\frac{\xi-\xi_i}{\xi_{i+p}-\xi_i}N_{i,p-1}(\xi)+\frac{\xi_{i+p+1}-\xi}{\xi_{i+p+1}-\xi_{i+1}}N_{i+1,p-1}(\xi). \quad (۴۲)$$

مشخص است که اگر گره‌های داخلی تکرار نشوند، C^{p-1}پیوسته هستند. بااین‌حال، اگر یک گره دارای چندگانه باشد، تابع C^{p-k} پیوسته در گره خاص است. به‌عنوان‌مثال، هنگامی‌که یک گره دارای چندگانه است، تابع پایه دارای پیوستگی C^0 و درون‌یابی در آن مکان است. ابتدا n تابع پایه از مرتبه p را با یک بردار گره به‌طور مناسب تعریف می‌شود. سپس منحنی Bspline چندجمله‌ای تکه‌ای $S(\xi)$ از مرتبه p را می‌توان با ترکیب خطی تابع پایه و نقاط کنترل به دست آورد:

$$S(\xi)=\sum_{i=1}^{n}N_{i,p}(\xi)C_i \quad (۴۳)$$

که در آن n تعداد نقاط کنترل است و $N_{i,p}(\xi)$ یک تابع پایه B-spline از مرتبه p مرتبط باiامین نقطه کنترل C_iاست. توابع مربوطه در زیرفضای محدود بعدی صورت می‌گیرد تا عبارت مجازی مسئله را به سیستم معادلات جبری در این مطالعه، زیرفضاها با استفاده از پایه B-spline تعریف می‌شوند:

$$Y=\sum_{i=1}^{N_t}N_iY_i \quad (۴۴)$$

جایی که N_t تعداد کل نقاط کنترل است. با جایگذاری معادله (۴۳) در معادلات حاکم داریم:

$$\left([K]\{Y\}+[M]\{\ddot{Y}\}\right)=\{F\}, \qquad (۴۵)$$

در رابطه فوق $[K]$ و $[M]$ به ترتیب بیانگر ماتریس سختی و ماتریس جرم می‌باشند. حال با استفاده از رابطه زیر:

$$d(x,\theta,t)=d_0(x,\theta)e^{\omega t}, \qquad (۴۶)$$

داریم:

$$\left[[K]+[M]\omega^2\right][d]=[0], \qquad (۴۷)$$

جایی که $[d]=[u\ v\ w\ \psi_x\ \psi_y]^T$ و ω فرکانس سازه است. حال به کمک روش مقدار ویژه، می‌توان قسمت حقیقی و موهومی فرکانس را محاسبه نموده و سرعت ناپایداری سازه را تعیین نمود.

۳- نتایج و نمودارها

برای تحلیل نتایج، یک لوله بتنی به طول $L=6m$ و شعاع $R=1m$، ضخامت $h=20\ cm$، مدول الاستیک $E=20\ GPa$ و ضریب پواسون $\nu=0.3$ در نظر گرفته شده که با نانو ذرات سیلیس با مدول الاستیک ۵۰ گیگاپاسکال و شریب پواسون ۰/۳ تقویت شده است. ضریب تخلخل ۰/۲ بوده و ضریب فنر و برش بستر خاک به ترتیب $k_w=48000\ N/m^3$ و $k_g=10\ N/m$ است. فرکانس بی‌بعد سازه $\Omega=\omega L^2\sqrt{\rho/C_{11}}$ و سرعت سیال بی بعد $V=\sqrt{\rho_f/C_{11}}v_x$ است.

۳-۱- اعتبار سنجی

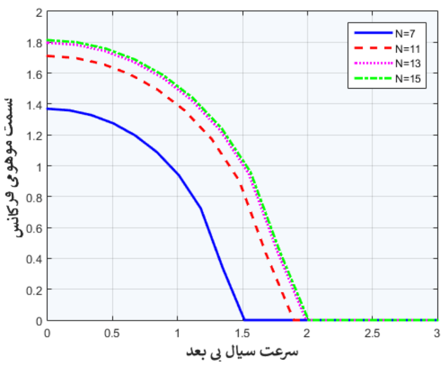
با توجه به جدید بودن موضوع این مقاله، با حذف نانوذرات، تخلخل لوله بتنی و سیال داخل لوله، ارتعاش آزاد یک لوله با نسبت طول به شعاع ۲۰ و نسبت ضخامت به شعاع ۰/۰۱ بررسی شده است و نتایج به مقاله ژانگ و همکارانش [۲۶] مقایسه شده است. مدول الاستیک لوله ۲۱۰ گیگاپاسکال، دانسیته ۷۸۵۰ کیلوگرم بر مترمکعب و ضریب پواسون لوله ۰/۳ است. جدول ۱ فرکانس سازه را برای مودهای مختلف ارتعاشی نشان می‌دهد که نشان از دقت نتایج این مقاله به کمک روش المان محدود بزیر با مقاله ژانگ و همکارانش [۲۶] دارد.

جدول ۱: اعتبارسنجی نتایج این مقاله و تحقیق ژانگ و همکاران [۲۶]

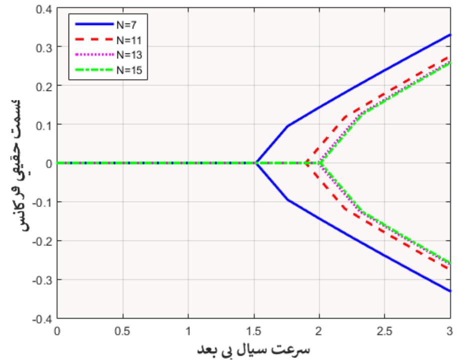
n	Zhang et al. [26]	Present
۱	۰٫۰۱۶۱۰۱	۰٫۰۱۶۱۰۲
۲	۰٫۰۰۹۳۸۲	۰٫۰۰۹۳۸۴
۳	۰٫۰۲۲۱۰۵	۰٫۰۲۲۱۰۷
۴	۰٫۰۴۲۰۹۵	۰٫۰۴۲۰۹۸
۵	۰٫۰۶۸۰۰۸	۰٫۰۶۸۰۰۹
۶	۰٫۰۹۹۷۳۱	۰٫۰۹۹۷۳۴
۷	۰٫۰۱۳۷۲۴۰	۰٫۰۱۳۷۲۶
۸	۰٫۱۸۰۵۲۷	۰٫۱۸۰۵۲۹
۹	۰٫۲۲۹۵۹۶	۰٫۲۲۹۵۹۸
۱۰	۰٫۲۸۴۴۳۸	۰٫۲۸۴۴۳۹

۳-۲- بررسی همگرایی روش عددی

به‌منظور تخمین فرکانس بی‌بعد قسمت‌های موهومی و حقیقی به کمک روش مربعات دیفرانسیلی، با توجه به سرعت سیال بی‌بعد در شکل‌های ۳ و ۴ به دقت همگرایی این روش مورد بحث و ارزیابی قرار گرفته است. نقاط در راستای طول و محیط لوله درنظر گرفته شده و یک شبکه دوبعدی تشکیل شده است. لازم به ذکر است که فاصله نقاط در مرز نزدیک و در نقاط شبکه فاصله بیشتری دارند. آشکار است که سرعت همگرایی این روش بسیار بالاست و با افزایش تعداد نقاط شبکه به ۱۵، می‌توان به دقت قابل قبولی دست پیدا کرد. این پیشرفت نشان‌دهنده بهره‌وری و کارآمدی بالای این روش در تحلیل فرکانس بی‌بعد موهومی و حقیقی به ازای مقادیر مختلف سرعت سیال بی‌بعد است و نتایج حاصل شده تا حد زیادی از دقت و قدرت تخمین این روش در این زمینه را تأیید می‌نماید.



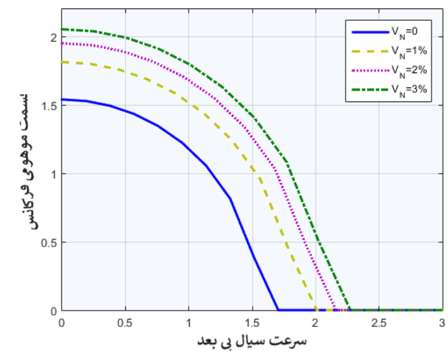
شکل ۳: همگرایی قسمت موهومی فرکانس بی‌بعد به کمک روش عددی بزیر المان محدود



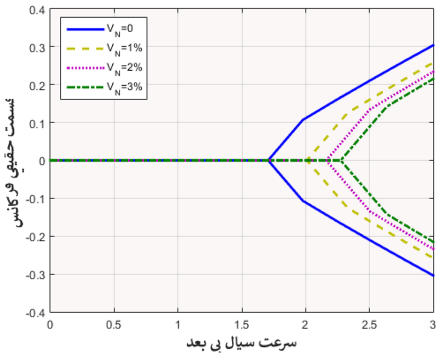
شکل ۴: همگرایی قسمت حقیقی فرکانس بی‌بعد به کمک روش بزیر المان محدود

۳-۳- بررسی اثر پارامترهای مختلف

نمودارهای ۵ و۶ به ترتیب تأثیر درصد حجمی نانوذرات سیلیس بر روی فرکانس بی‌بعد (قسمت موهومی پاسخ) و میرایی (قسمت حقیقی پاسخ) لوله در مقابل سرعت سیال بی‌بعد آن‌ها را با دقت بیشتر نمایان می‌سازند. همان‌طور که از این نمودارها آشکار است، با افزایش سرعت سیال، فرکانس به سمت کاهش پیش می‌رود درحالی‌که مقدار میرایی در این محدوده صفر است که نشان‌دهنده پایداری سیستم در این بازه است. با افزایش سرعت، درنهایت، در یک سرعت خاص که فرکانس (قسمت موهومی) به مقدار صفر می‌رسد، سیستم به دلیل واگرایی یا ایجاد دوشاخگی، پایداری خود را از دست می‌دهد و مقادیر ویژه فرکانس دارای مقادیر حقیقی مثبت می‌شوند که نمایانگر ناپایداری سیستم است. این نمودارها به‌وضوح نشان می‌دهند که هرچه درصد حجمی نانوذرات سیلیس بیشتر باشد، فرکانس و سرعت بحرانی سیال نیز افزایش می‌یابد، زیرا با افزودن نانوذرات، سفتی سازه افزایش می‌یابد. به‌عنوان‌مثال، با افزایش درصد حجمی نانوذرات از صفر به ۳ درصد، بیشینه فرکانس و سرعت بحرانی سیال به ترتیب ۳۵ درصد و ۳۸ درصد افزایش می‌یابد.



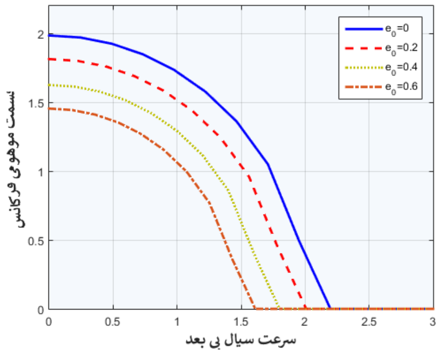
شکل ۵: اثر درصد حجمی نانو ذرات سیلیس بر قسمت موهومی فرکانس بی‌بعد در برابر سرعت سیال بی‌بعد



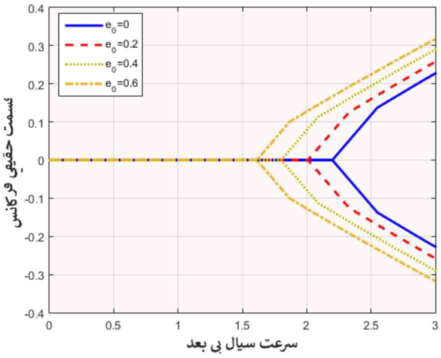
شکل ۶: اثر درصد حجمی نانو ذرات سیلیس بر قسمت حقیقی فرکانس بی‌بعد در برابر سرعت سیال بی‌بعد

نمودارهای ۷ و ۸ تأثیر تخلخل بتن بر قسمت موهومی و حقیقی فرکانس سازه با تغییرات سرعت سیال بی‌بعد را به تصویر می‌کشند. همان‌طور که واضح است، در نظر گرفتن تخلخل منجر به کاهش سفتی سازه شده و بنابراین فرکانس بیشینه و سرعت بحرانی سیال نیز کاهش می‌یابد. این مسئله به‌ویژه حائز اهمیت است زیرا تخلخل به‌صورت مداوم در ساختارهای لوله‌های بتنی حاضر است. به‌عنوان‌مثال، با افزایش تخلخل بتن از صفر به ۰/۶، فرکانس بیشینه و سرعت بحرانی سیال به ترتیب ۲۶ درصد و ۱۸ درصد کاهش می‌یابد. این نتایج به‌وضوح نشان‌دهنده تأثیر قابل‌توجه تخلخل بر ویژگی‌های دینامیکی سازه است و نحوه واکنش آن به تغییرات سرعت سیال را نمایان می‌سازد.

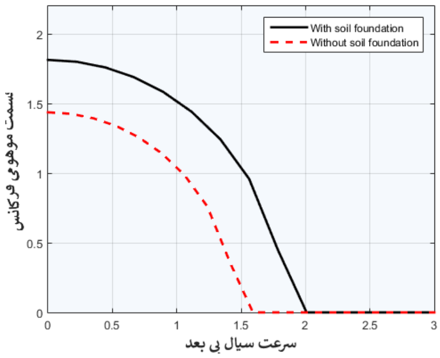
نمودارهای ۹ و ۱۰ تأثیر حضور بستر خاک بر قسمت‌های موهومی و حقیقی فرکانس سازه به ازای متغیر سرعت سیال بی‌بعد را نشان می‌دهند. همان‌گونه که واضح است، با داشتن بستر خاک در اطراف لوله، فرکانس بیشینه و سرعت بحرانی سیال افزایش می‌یابد. این افزایش به دلیل افزایش سفتی سازه ناشی از حضور بستر خاک است. به‌عبارت‌دیگر، وجود خاک در اطراف لوله باعث افزایش ۲۱ درصدی فرکانس سازه و ۲۹ درصدی سرعت بحرانی سیال می‌شود. این نتایج به‌وضوح نشان‌دهنده تأثیر چشمگیر حاصل از حضور بستر خاک بر خواص دینامیکی سازه و نحوه پاسخ آن به تغییرات سرعت سیال می‌باشند.



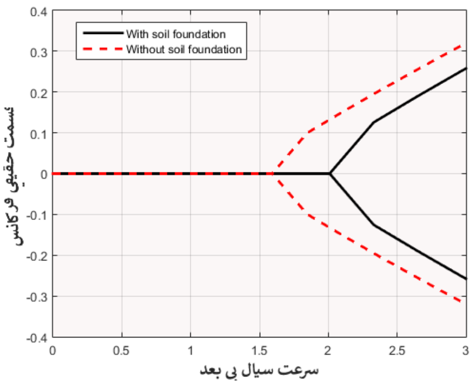
شکل ۷: اثر تخلخل بتن بر قسمت موهومی فرکانس بی‌بعد در برابر سرعت سیال بی‌بعد



شکل ۸: اثر تخلخل بتن بر قسمت حقیقی فرکانس بی‌بعد در برابر سرعت سیال بی‌بعد

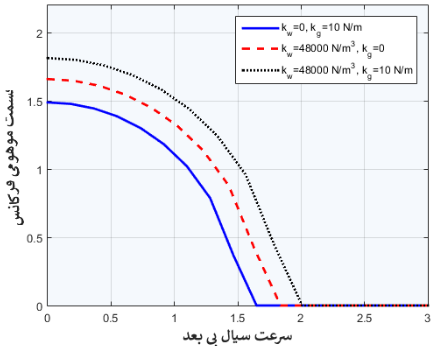


شکل ۹: اثر بستر خاک بر قسمت موهومی فرکانس بی‌بعد در برابر سرعت سیال بی‌بعد

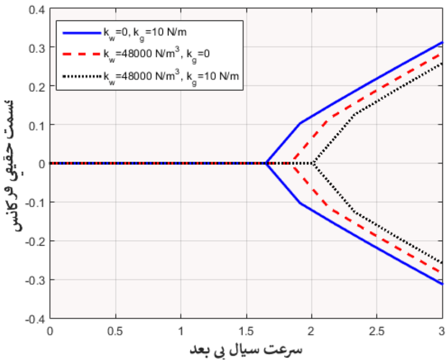


شکل ۱۰: اثر بستر خاک بر قسمت حقیقی فرکانس بی‌بعد در برابر سرعت سیال بی‌بعد

از نگاه فیزیکی، در شکل‌های ۱۱ و ۱۲ تأثیر ضریب فنر و برش بستر خاک بر فرکانس بی بعد و میرایی سیستم به ازای سرعت سیال بی بعد در قسمت‌های موهومی و حقیقی موردبررسی قرار گرفته است. این مشاهدات نشان می‌دهند که با افزایش ضریب فنر و برش بستر خاک، فرکانس بیشینه و سرعت بحرانی سیال افزایش می‌یابد؛ این افزایش به دلیل افزایش سفتی سازه ناشی از افزایش ضریب فنر و برش بستر خاک اتفاق می‌افتد. همچنین، اثر ضریب فنر بستر خاک به نسبت بیشتری نسبت به اثر ضریب برش بوده و افزایش آن تأثیر مهمی در افزایش فرکانس سازه دارد. این تحلیل از جهت فیزیکی نقش مهمی در تفسیر تغییرات دینامیکی سازه با تغییرات در خصوصیات خاک و ویژگی‌های مکانیکی سازه ارائه می‌دهد.



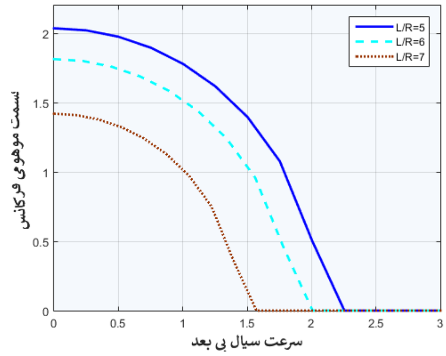
شکل ۱۱: اثر ضریب فنر و برش خاک بر قسمت موهومی فرکانس بی‌بعد در برابر سرعت سیال بی‌بعد



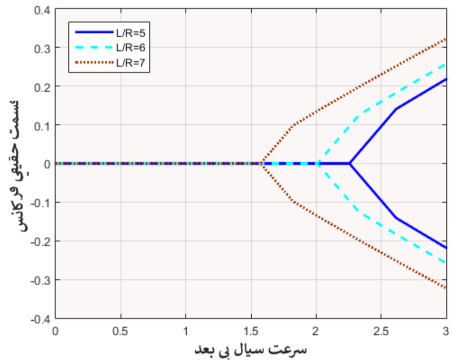
شکل ۱۲: اثر ضریب فنر و برش خاک بر قسمت حقیقی فرکانس بی‌بعد در برابر سرعت سیال بی‌بعد

شکل‌های ۱۳ تا ۱۶حاکی از تأثیر سرعت سیال بی بعد بر فرکانس و میرایی سیستم برای پارامترهای هندسی مختلف لوله می‌باشند. همان‌طور که از شکل‌های ۱۳ و ۱۴به دست می‌آید، با افزایش نسبت طول به شعاع لوله بتنی، فرکانس بیشینه و سرعت بحرانی سیال کاهش می‌یابد. این اتفاق به دلیل نرم‌تر شدن سیستم با افزایش نسبت طول به

شعاع لوله بتنی رخ می‌دهد. از منظر کمی، افزایش این نسبت منجر به کاهش ۲۹ درصدی فرکانس و ۳۱ درصدی سرعت بحرانی سیال می‌شود.

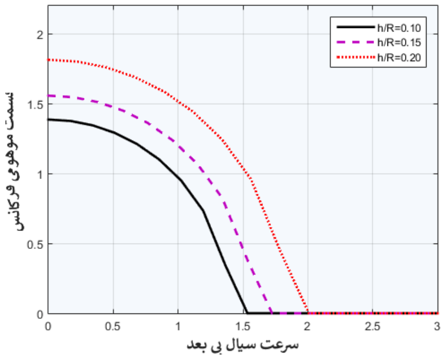


شکل ۱۳: اثر نسبت طول به شعاع لوله بتنی بر قسمت موهومی فرکانس بی‌بعد در برابر سرعت سیال بی‌بعد

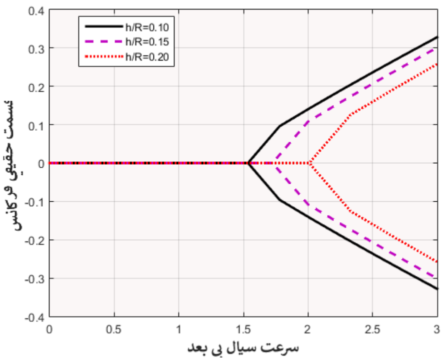


شکل ۱۴: اثر نسبت طول به شعاع لوله بتنی بر قسمت حقیقی فرکانس بی‌بعد در برابر سرعت سیال بی‌بعد

به‌تفصیل در شکل‌های (۱۵) و (۱۶) که اثر نسبت ضخامت به شعاع لوله بتنی را نشان می‌دهند، آشکار است که افزایش این نسبت منجر به افزایش فرکانس و سرعت بحرانی سیال می‌شود؛ این افزایش به دلیل افزایش سفتی سازه است. ازنظر کمی، افزایش نسبت ضخامت به شعاع لوله بتنی، فرکانس و سرعت بحرانی سیال را به ترتیب ۳۲ درصد و ۳۳ درصد افزایش می‌دهد. این تحلیل از جهت فیزیکی نقش مهمی در تفسیر تغییرات دینامیکی سازه با تغییرات در پارامترهای هندسی لوله ارائه می‌دهد.



شکل ۱۵: اثر نسبت ضخامت به شعاع لوله بتنی بر قسمت موهومی فرکانس بی‌بعد در برابر سرعت سیال بی‌بعد



شکل ۱۶: اثر نسبت ضخامت به شعاع لوله بتنی بر قسمت حقیقی فرکانس بی‌بعد در برابر سرعت سیال بی‌بعد

۴- نتیجه‌گیری

تحلیل ناپایداری لوله‌های بتنی متخلخل مدفون در این مقاله موردبررسی قرار گرفته است. لوله با نانوذرات تقویت شده و با مدل پوسته استوانه‌ای مرتبه بالا مدل‌سازی شده است. خواص معادل لوله با استفاده از قانون اختلاط محاسبه گردید و برای به دست آوردن معادلات حاکم بر سیستم، از روش انرژی و اصل همیلتون استفاده شد. با استفاده از روش عددی المان محدود بزیر، معادلات حرکت تحلیل شده و سرعت بحرانی سیال به دست آمده است. اثر پارامترهای مختلف ازجمله درصد حجمی نانو ذرات، تخلخل، بستر خاک، پارامترهای هندسی و سرعت سیال عبوری روی ارتعاشات و ناپایداری سازه بررسی گردید. نتایج نشان داد:

- خطای روش عددی بزیر المان محدود نسبت به روش تحلیلی بسیار ناچیز بوده و قابل‌قبول است که این نشان از صحت نتایج این پروژه دارد.
- با افزایش سرعت، درنهایت، در یک سرعت خاص که فرکانس (قسمت موهومی) به مقدار صفر می‌رسد، سیستم به دلیل واگرایی یا ایجاد دوشاخگی، پایداری

خود را از دست می‌دهد و مقادیر ویژه فرکانس دارای مقادیر حقیقی مثبت می‌شوند که نمایانگر ناپایداری سیستم است.

- با افزایش درصد حجمی نانوذرات از صفر به ۳ درصد، بیشینه فرکانس و سرعت بحرانی سیال به ترتیب ۳۵ درصد و ۳۸ درصد افزایش می‌یابد.
- با افزایش تخلخل بتن از صفر به ۰/۶، فرکانس بیشینه و سرعت بحرانی سیال به ترتیب ۲۶ درصد و ۱۸ درصد کاهش می‌یابد. این نتایج به‌وضوح نشان‌دهنده تأثیر قابل‌توجه تخلخل بر ویژگی‌های دینامیکی سازه است و نحوه واکنش آن به تغییرات سرعت سیال را نمایان می‌سازد.
- وجود خاک در اطراف لوله باعث افزایش ۲۱ درصدی فرکانس سازه و ۲۹ درصدی سرعت بحرانی سیال می‌شود.
- با افزایش ضریب فنر و برش بستر خاک، فرکانس بیشینه و سرعت بحرانی سیال افزایش می‌یابد. همچنین، اثر ضریب فنر بستر خاک به نسبت بیشتری نسبت به اثر ضریب برش بوده و افزایش آن تأثیر مهمی در افزایش فرکانس سازه دارد.
- افزایش نسبت طول به شعاع لوله بتنی منجر به کاهش ۲۹ درصدی فرکانس و ۳۱ درصدی سرعت بحرانی سیال می‌شود.
- افزایش نسبت ضخامت به شعاع لوله بتنی، فرکانس و سرعت بحرانی سیال را به ترتیب ۳۲ درصد و ۳۳ درصد افزایش می‌دهد.

مراجع

[1] Alijani, F., and Amabili, M. (2014). Non-Linear Vibrations of Shells: A Literature Review From 2003 to 2013. Int. J. Non-Linear Mech. 58: 233–257.

[2] Gonc¸alves, P.B., Pamplona, D., and Lopes, S.R.X.. (2008). Finite Deformations of an Initially Stressed Cylindrical Shell Under Internal Pressure. Int. J. Mech. Sci. 50(1): 92–103.

[3] Dung, D.V. and Hoa, L.K. (2015). Semi-analytical approach for analyzi.ng the nonlinear dynamic torsional buckling of stiffened functionally graded material circular cylindrical shells surrounded by an elastic medium. Appl. Math. Model. 39(22): 6951-6967.

[4] Breslavsky, I.D., Amabili, M. and Legrand, M. (2016). Static and dynamic behavior of circular cylindrical shell made of hyperelastic arterial material, J. Appl. Mech. 83: 051002.

[5] Amabili, M. and Breslavsky, I.D. (2015). Displacement Dependent Pressure Load for Finite Deflection of Shells and Plates. Int. J. Non-Linear Mech., 77: 265–273.

[6] Chen, J. and Li, Q-S. (2017). Nonlinear aeroelastic flutter and dynamic response of composite laminated cylindrical shell in supersonic air flow. Compos Struct, 168: 474-484.

[7] Ortigosa, R. and Gil, A.J. (2017). A computational framework for incompressible electromechanics based on convex multi-variable strain energies for geometrically exact shell theory, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 317: 792–816.

[8] Liu, Y., Wang, K.F. and Wang B.L. (2018). Mechanics modeling of dynamic characteristics of laminated thermoelectric cylindrical shells, Appl. Therm. Eng. 136: 730-739.

[9] Wang, M., Zhang, J., Wang W. Tang, W. (2018). Linear and nonlinear elastic buckling of stereolithography resin egg-shaped shells subjected to external pressure. Thin-Walled Struct. 127: 516–522

[10] Mehar K., Panda S.K., Devarajan Y. and Choubey G. (2019). Numerical buckling analysis of graded CNT-reinforced composite sandwich shell structure under thermal loading. Compos Struct. 216: 406–414.

[11] Xiang, P., Xia, Q., Jiang, L.Z., Peng, L., Yan, J.W. and Liu, X. (2021) Free vibration analysis of FG-CNTRC conical shell panels using the kernel particle Ritz element-free method. Compos Struct. 255: 112987.

[12] Lotfan, S., Rafiei Anamagh M., Bediz B. (2021). A general higher-order model for vibration analysis of axially moving doubly-curved panels/shells. Thin-Walled Struct. 164: 107813.

[13] Wu, J.h., Liu, R-J., Duan, Y. and Sun, Y-D. (2023). Free and forced vibration of fluid-filled laminated cylindrical shell under hydrostatic pressure Int. J. Press. Vessel. 202: 104925.

[14] Nekouei, M., Mohammadi, M., Raghebi, M. and Motahari, N. (2023). Stability analysis of hybrid laminated cylindrical shells reinforced with shape memory fibers. Eng. Anal. Bound. Elem. 152: 739-756.

[15] Sadeghi, M.H. and Karimi-Dona M.H. (2011). Dynamic behavior of afluid conveying pipe subjected to a moving sprung masse An FEM-state space approach, Int. J. Press. Vessel. 88: 123e131.

[16] Mirramezani, M., Mirdamadi H.R. and Ghayour, M. Nonlocal vibrations of shell-type CNT conveying simultaneous internal and external (2014). flows by considering slip condition, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 272:100–120.

[17] Sheng, G.G. and Wang, X. (2017). Nonlinear response of fluid-conveying functionally graded cylindrical shells subjected to mechanical and thermal loading conditions. Compos Struct 168:675–684.
[18] Durmus, D., Balkaya, M. and Kaya, M.O. (2021). Comparison of the free vibration analysis of a fluid-conveying hybrid pipe resting on different two-parameter elastic soils. Int. J. Press. Vessel. 193: 104479.
[19] Ma, Y., You, Y., Chen, K. and Feng, A. (2022). Analysis of vibration stability of fluid conveying pipe on the two-parameter foundation with elastic support boundary conditions. JOES. https://doi.org/10.1016/j.joes.2022.11.002.
[20] Liang, F., Chen, Z-Q. and Xu, W-H. (2023). Vibration isolation of a self-powered piezoelectric pipe conveying fluid composed of laminated fiber-reinforced composites. Appl. Ocean Res. 138:103664.
[21] Fu, G., Wang, X., Wang, B., Su, J., Wang, K. and Sun, B. (2024). Dynamic behavior of axially functionally graded pipe conveying gas–liquid two-phase flow. Appl. Ocean Res. 142: 103827.
[22] Wen, H., Yang, Y., Li, Y. and Tao, J. (2023). Three-dimensional vibration analysis of curved pipes conveying fluid by straight pipe-curve fluid element. Appl. Math. Model. 121: 270-303.
[23] Qu, Y., Hua, H. and Meng, G. (2013). Adomain decomposition approach for vibration analysis of isotropic and composite cylindrical shells with arbitrary boundaries. Compos. Struct., 95: 307–321.
[24] Saidi, A. Bahaadini, R. and Majidi-Mozafari, K. (2019) On vibration and stability analysis of porous plates reinforced by graphene platelets under aerodynamical loading, Compos. B. Eng. 164: 778–799.
[25] Nguyen, L.B. Nguyen N.V., C.H., Thai, Ferreira, A.M.J., Nguyen-Xuan H. (2019). An isogeometric Bézier finite element analysis for piezoelectric FG porous plates reinforced by graphene platelets. Compos Struct. 214: 227–245.
[26] Zhang, X.M., Liu, G.R., and Lam, K.Y. (2001). Vibration analysis of thin cylindrical shells using wave propagation approach. J. Sound Vib. 239: 397.