



مقاله پژوهشی

در نظر گرفتن عدم قطعیت برای تخمین پارامترهای مقاومت برشی سنگ بکر با استفاده از روش‌های آماری

مهدی محمدی^{۱*}، محمد فاتحی مرجی^۲

۱- گروه مهندسی معدن، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان، رفسنجان، ایران

۲- دانشکده مهندسی معدن و متالوژی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

(دریافت: مهر ۱۴۰۱، پذیرش: اردیبهشت ۱۴۰۲)

چکیده

یکی از چالش‌های موجود در روند تحلیل پایداری و یا طراحی یک سازه سنگی به روش تعادل حدی، تعیین پارامترهای مقاومت برشی شامل چسبندگی و زاویه اصطکاک داخلی است؛ زیرا در عمل با توجه به ناهمگنی موجود در سنگ، پیش‌بینی این پارامترها همواره با تردید همراه است. در چنین شرایطی اگر بتوان دامنه‌ای از پارامترهای مقاومت برشی واقعی را به دست آورد، قابلیت اعتماد به نتایج بالاتر خواهد بود. در این مقاله برای رسیدن به هدف موردنظر، یک روش کاربردی بر مبنای روش‌های احتمالاتی توسعه داده شده است. در گام اول برای تولید نمونه‌های تصادفی از پارامترهای مقاومت برشی با توسعه یک روش ابتکاری، گروه‌هایی از جفت تنش‌های کمینه و بیشینه تولید شده است. در گام بعدی پس از تولید پارامترهای مقاومت برشی با استفاده از دو معیار پرکاربرد، موهرکلمب و هوک‌براون و با استفاده از توزیع t ، دامنه‌ای که پارامترهای مقاومت برشی در آن قرار دارند با سطح اطمینان ۹۵ درصد برای دو معیار شکست به صورت جداگانه تعیین شده است. برای بررسی روش ارائه شده، مطالعه موردی روی نمونه‌های ماسه‌سنگ پینگ دینگ شان انجام شده است. نتایج حاصل از مطالعه موردی بیانگر این است که پیش‌بینی دامنه پارامترهای مقاومت برشی با روش توسعه داده شده در مقایسه با روش مرسوم از قطعیت بیشتری برخوردار است و بنابراین طراح اعتماد بیشتری به نتایج می‌تواند داشته باشد.

کلمات کلیدی

پارامترهای مقاومت برشی، معیار شکست موهرکلمب، معیار شکست هوک‌براون، عدم قطعیت، توزیع t

*عهده‌دار مکاتبات: mehdi.mohammadi@vru.ac.ir

۱- مقدمه

تحلیل پایداری سازه‌های سنگی در پروژه‌های معدنی و عمرانی مانند دیواره‌های معادن سطحی، دیواره سدها و یا شیب‌های سنگی واقع در مسیر جاده‌ها بسیار ضروری و بااهمیت است. زیرا عدم پایداری هر یک از آن‌ها خسارات زیادی برجا خواهد گذاشت. یکی از روش‌های متداول برای تحلیل پایداری، روش‌های تعادل حدی است. روش‌های تعادل حدی بر مبنای فاکتور اطمینان بیان می‌شوند. فاکتور اطمینان پارامتری است کمی که معرف پایداری یا عدم پایداری یک سازه سطحی است. فاکتور اطمینان نسبت تنش‌های مقاوم به تنش‌های مخرب تعریف می‌شود [۱]. معمولاً مدلی که برای تحلیل پایداری به روش تعادل حدی استفاده می‌شود مدل موهرکلمب است [۲]. برای استفاده از این مدل نیاز به تعیین پارامترهای مقاومت برشی است. پارامترهای مقاومت برشی همان چسبندگی و زاویه اصطکاک داخلی سنگ هستند. چسبندگی و زاویه اصطکاک داخلی، بیانگر تنش‌های عمودی و مماس بر صفحه شکست هستند که معرف ناپایداری نمونه تحت تأثیر تنش‌ها است [۳]. به عبارت دیگر با تعیین پارامترهای مقاومت برشی، می‌توان تنش‌های برشی متناظر با تنش‌های نرمال را مطابق با معیار شکست موهرکلمب و هوک براون را پیش‌بینی کرد.

در عمل برای تعیین پارامترهای مقاومت برشی سنگ بکر، از دو معیار شکست موهرکلمب و هوک براون که کاربرد فراوانی دارند استفاده می‌شود. نتایج حاصل از دو معیار به صورت یک عدد قطعی است.

مطالعات نشان می‌دهد که نتایج حاصل شده از دو معیار تحت تأثیر عدم قطعیت ۱- حاصل از رابطه ریاضی معیار شکست، ۲- ناشی از ناهمگنی سنگ بکر است. در ادامه نتایج بررسی‌ها آورده شده است.

در رابطه با عدم قطعیت حاصل از رابطه ریاضی معیار شکست بررسی‌ها نشان می‌دهد که: معیار موهرکلمب، معیاری است خطی، به عبارت دیگر پارامترهای چسبندگی و زاویه اصطکاک داخلی، در تنش‌های مختلف ثابت هستند [۴]. این موضوع در شکل ۱ نمایش داده شده است؛ بنابراین بدیهی است که پارامترهای مقاومت برشی حاصل شده نمی‌تواند بیانگر مقاومت سنگ در تنش‌های مختلف باشد.

همچنین یکی از پرکاربردترین معیارها، برای تعیین پارامترهای مقاومت برشی، معیار شکست هوک براون است

[۵]. معیار هوک براون معیاری است غیرخطی، از این رو پارامترهای مقاومت برشی (معادل معیار موهرکلمب) در تنش‌های عمودی مختلف، متغیر هستند (شکل ۲). از طرفی تنش‌های عمودی تابعی از زاویه صفحه شکست در هنگام ناپایداری نمونه تحت تأثیر تنش‌های سه محوره هستند. بررسی‌هایی که بر روی زاویه صفحه شکست نمونه‌های سنگ بکر تحت تأثیر تنش جانبی انجام شده، نشان می‌دهد که زوایای صفحه شکست حاصل شده از نمونه‌های آزمایشگاهی با زاویه صفحه شکست حاصل از معیار هوک براون یکسان نیست [۶]. این موضوع در نهایت نشان می‌دهد که پارامترهای مقاومت برشی حاصل شده از قابلیت اعتماد بالایی برخوردار نیستند. زیرا پارامترهای مقاومت برشی غیردقیق و نامناسب، می‌تواند فاکتور اطمینان غیردقیق و گمراه‌کننده پیش‌بینی نماید [۷].

در رابطه با عدم قطعیت ناشی از ناهمگنی سنگ، بررسی‌ها نشان می‌دهد که برای تخمین پارامترهای مقاومت برشی سنگ بکر، نیاز به حداقل ۵ نتیجه آزمایش سه محوره است تا بر اساس رگرسیون گیری این پارامترها تخمین زده شود. چنانچه تعداد نمونه‌ها (تعداد آزمایش‌ها)، تغییر کنند و یا مقاومت نهایی یکی از نمونه‌ها تحت تأثیر تنش جانبی در آزمایش تغییر نماید، در نهایت پس از رگرسیون گیری از نتایج آزمایش، پارامترهای مقاومت برشی نیز تغییر می‌کنند.

بنابراین با توجه به چالش‌های مطرح شده، تخمین منطقی پارامترهای مقاومت برشی یک مرحله حیاتی در طراحی و تحلیل سازه‌های سنگی محسوب می‌شود. در دهه‌های گذشته بررسی‌هایی برای تعیین پارامترهای معادل مقاومت برشی بر اساس معیار هوک براون گزارش شده است [۸-۱۸]. به نقل از براون تعیین دقیق معادل پارامترهای مقاومت برشی با توجه به عدم قطعیت ذاتی سنگ و همچنین روابط معیار شکست کاری چالش برانگیز است [۸].

در چنین شرایطی یکی از روش‌های بسیار مفید استفاده از روش‌های آماری و احتمالاتی است، زیرا این روش‌ها می‌توانند دامنه‌ای از مقادیر واقعی پارامترهای مقاومت برشی با سطح اطمینان مشخص را تخمین بزنند. روش‌های آماری برای اولین مرتبه توسط وایبول توسعه داده شد [۱۹] و تاکنون مطالعات زیادی در زمینه برآورد احتمالاتی خواص توده سنگ انجام شده است. کیم یک روش احتمالاتی برای تخمین خصوصیات مقاومت توده سنگ، توسعه داد. او برای شبیه‌سازی متغیرهای تصادفی از روش مونت کارلو و برای

در این مقاله با استفاده از روش‌های آماری که کارایی بالایی در حل مسائلی که همراه با عدم قطعیت هستند، به بررسی این موضوع پرداخته می‌شود. برای این منظور ابتدا با توسعه روشی کاربردی و جدید نمونه پارامترهای مقاومت برشی تولید و سپس با استفاده از روش‌های آماری و احتمالاتی دامنه‌ای که پارامترهای مقاومت برشی واقعی در آن قرار دارند را با سطح اطمینان ۹۵ درصد تخمین می‌زند.

۲- معیار شکست موهر کلمب و هوک براون

طبق معیار شکست موهر کلمب، بین تنش نرمال و تنش برشی مماس بر صفحه شکست بر روی یک نمونه تحت تنش سه‌محوره رابطه‌ای خطی وجود دارد [۲۶-۲۷]. رابطه (۱) ارتباط بین تنش‌های روی صفحه شکست را نمایش می‌دهد (شکل ۱ الف).

$$\tau = c + \sigma_n \tan \varphi \quad (1)$$

که پارامترهای c, φ به ترتیب چسبندگی و زاویه اصطکاک داخلی که همان پارامترهای مقاومت برشی است؛ می‌باشند، σ_n تنش نرمال و τ تنش‌های برشی روی صفحه شکست هستند. بنابراین پارامترهای مقاومت برشی بیانگر ترکیب تنش‌ها در ظه شکست بر روی نمونه است [۲۸]. معیار موهر کلمب بر اساس تنش‌های بیشینه و تنش‌های کمینه نیز ارائه شده است.

$$\sigma_1' = k\sigma_3' + \sigma_c \quad (2)$$

در عمل برای تعیین پارامترهای k و σ_c (مقاومت فشاری تک‌محوره)، پس از انجام آزمایش سه‌محوره بر روی تعدادی نمونه و تعیین تنش‌های کمینه در تنش‌های جانبی مختلف، با استفاده از روش رگرسیون گیری، K و σ_c به دست می‌آیند (شکل ۱ ب). پارامترهای مقاومت برشی نیز از طریق روابط (۳) تخمین زده می‌شود.

$$k = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (3 \text{ الف})$$

$$\sigma_c = \frac{2c \times \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (3 \text{ ب})$$

برازش نتایج آزمایش‌ها، از توان دوم کای برای سنگ بازالت استفاده کرد و نتایج مطلوبی به‌دست آورد [۲۰]. هوک و براون در سال ۱۹۹۸، برای پیش‌بینی پارامترهای معیار هوک براون از روش احتمالاتی برآورد نقطه‌ای استفاده کرد [۲۱]. برای این منظور پارامترهای ورودی مانند شاخص مقاومت زمین‌شناسی، مقاومت فشاری تک‌محوره و ثابت سنگ بکر (m_i) را به‌عنوان متغیر تصادفی و توزیع این متغیرها را نرمال در نظر گرفت. ساری، برای برآورد پارامترهای مقاومتی توده‌سنگ یک روش عملی احتمالاتی با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو ارائه نمود [۲۲]. وی تابع هدف را معیار هوک براون در نظر گرفت. در ابتدا توزیع پارامترهای موردنیاز، مانند مقاومت فشاری تک‌محوره، فاصله‌داری، طول ناپیوستگی و دهانه ناپیوستگی (پارامترهای متغیر RMR) را تعیین و سپس بر اساس این پارامترها توزیع پارامترهای هوک براون و پارامترهای مقاومتی توده‌سنگ را شبیه‌سازی کرد و نتیجه گرفت، سطح اطمینان نتایج با این روش بیشتر از روش‌های قطعی است. همچنین ساری و همکارانش، در ادامه تحقیقاتش، در سال ۲۰۱۰ با در نظر گرفتن تأثیر عوامل مؤثر روی پارامترهای معیار هوک براون مجدداً پارامترهای مقاومت توده‌سنگ را با استفاده از روش مونت کارلو شبیه‌سازی و بررسی کردند [۲۳]. آیدریس با ترکیب روش عددی اجزا محدود و شبیه‌سازی مونت کارلو تغییرپذیری خواص توده‌سنگ را در پایداری طبقات معادن مطالعه کرد [۲۴]. وی در بررسی‌های خود توزیع پارامترهای ورودی به تحلیل را نرمال در نظر گرفت. ربیعی وزیری و همکاران، پارامترهای مقاومت برشی توده‌سنگ معدن سنگ آهن گل‌گهر را با استفاده از روش مونت کارلو شبیه‌سازی کرد و دریافتند که افزایش ضریب تغییرات و پراکندگی در توزیع می‌تواند ناشی از فرم روابط استفاده شده برای تعیین پارامترهای خروجی باشد [۲۵].

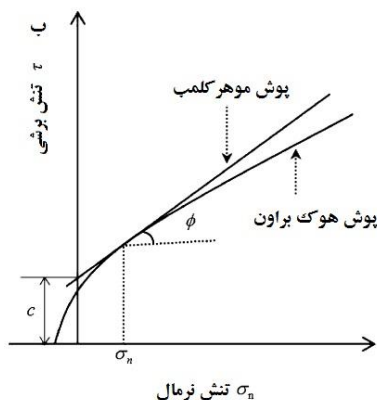
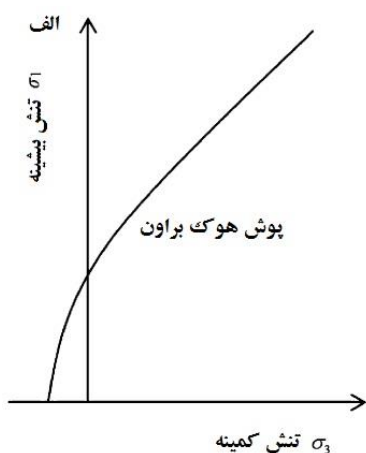
مطالعه انجام شده نشان می‌دهد، روش‌های آماری، در مسائلی که همراه با عدم قطعیت هستند، نتایج قابل قبولی ارائه می‌نماید.

بنابراین با توجه به مطالب ذکر شده، می‌توان به این نکته اشاره کرد که عدم قطعیت موجود در ۱- روابط معیارهای شکست موهر کلمب و هوک براون، ۲- خواص ذاتی سنگ بکر، یکی از چالش‌های اساسی و مهم در علم مهندسی سنگ است و این موضوع می‌تواند در پارامترهای مقاومت برشی حاصل شده اثرگذار باشد.

مانند موج ناشی از انفجار است. این فاکتور بین صفر تا یک تغییر می‌کند [۱،۳۰]. شاخص مقاومت زمین‌شناسی برای سنگ بکر برابر با ۱۰۰ است. چنانچه نمونه به‌صورت بکر باشد رابطه هوک‌براون به‌صورت رابطه (۷) تبدیل می‌شود.

$$\sigma'_1 = \sigma'_3 + \sqrt{\sigma_{ci} m_i \sigma'_3 + \sigma_{ci}^2} \quad (7)$$

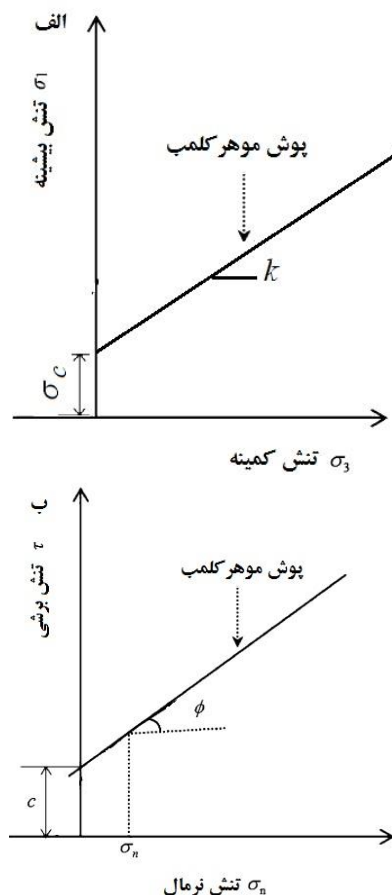
در عمل برای تعیین m_i و σ_{ci} تعدادی نمونه تحت تأثیر تنش جانبی قرار داده و سپس با تعیین تنش کمینه، با استفاده از روش رگرسیون‌گیری پارامترهای موردنظر پیش‌بینی می‌شوند. شکل ۲ الف، منحنی معیار شکست را بر اساس تنش‌های اصلی نمایش می‌دهد.



شکل ۲: معیار شکست هوک‌براون. الف- بر اساس تنش‌های اصلی. ب- بر اساس تنش‌های روی صفحه شکست

معیار شکست هوک‌براون بر اساس تنش‌های نرمال و برشی روی صفحه شکست نیز بیان می‌شود. روابط (۸) و (۹) توسط بالمر [۳۱] پیشنهاد شده است.

$$\sigma_n = \sigma'_3 + \frac{(\sigma'_1 - \sigma'_3)}{(\partial \sigma'_1 / \partial \sigma'_3) + 1} \quad (8)$$



شکل ۱: معیار شکست موهر کلمب. الف- بر اساس تنش‌های روی صفحه شکست. ب- بر اساس تنش‌های اصلی

معیار هوک‌براون بر پایه آزمایش و تجربه روی تعدادی پروژه و نتایج آزمایشگاهی توسط هوک و براون توسعه داده شده است. عمومی‌ترین فرم این معیار که هم حالت اصلی و هم حالت اصلاح‌شده را در برمی‌گیرد به‌صورت رابطه (۴) بیان می‌شود [۲۹].

$$\sigma'_1 = \sigma'_3 + \sigma_{ci} \left(m_b \frac{\sigma'_3}{\sigma_{ci}} + s \right)^\alpha \quad (4)$$

σ'_1, σ'_3 تنش اصلی کمینه و تنش اصلی بیشینه S, m_b, a پارامترهای ثابت توده‌سنگ هستند، σ_{ci} مقاومت فشاری سنگ بکر است. پارامتر a بزرگ‌تر یا مساوی با ۰/۵ است. a و s برای سنگ بکر به ترتیب برابر با ۰/۵ و ۱ است. S, m_b از رابطه (۵) و (۶) به‌دست می‌آیند [۱].

$$m_b = m_i \times e^{\left(\frac{GSI-100}{28-14D} \right)} \quad (5)$$

$$s = e^{\left(\frac{GSI-100}{9-3D} \right)} \quad (6)$$

GSI, D به ترتیب شاخص مقاومت زمین‌شناسی و فاکتور اغتشاش نام دارند. فاکتور اغتشاش تابع تنش‌های القایی

$$\tau = (\sigma_n - \sigma'_3) \sqrt{\left(\frac{\partial \sigma'_1}{\partial \sigma'_3}\right)} \quad (9)$$

$$\tau = (\sigma_n - \sigma'_3) \sqrt{1 + am_b \left(\frac{m_b}{\sigma_{ci}} \sigma'_3 + S\right)^{a-1}} \quad (11)$$

بر اساس شکل ۲ ب، چنانچه در تنش نرمال موردنظر، خطی بر منحنی معیار شکست مماس شود، پارامترهای معادل مقاومت برشی موهر کلمب تعیین می‌شوند. همچنین این پارامترها از روابط (۱۲) و (۱۳) محاسبه می‌شوند. در روابط موردنظر σ'_{3n} بالاترین تنش جانبی موجود در منطقه است که برای شیروانی‌ها از رابطه (۱۴) به‌دست می‌آید [۱].

$$\varphi = \sin^{-1} \left[\frac{6am_b(s + m_b\sigma_{3n})^{a-1}}{2(1+a)(2+a) + 6am_b(s + m_b\sigma_{3n})^{a-1}} \right] \quad (12)$$

$$C = \frac{\sigma_{ci}[(1+2a)S + (1-a)m_b\sigma_{3n}](S + m_b\sigma_{3n})^{a-1}}{(1+a)(2+a)\sqrt{1 + (6am_b(S + m_b\sigma_{3n})^{a-1})}} \quad (13)$$

$$\sigma_{3n} = \sigma_{3max}/\sigma_{ci}$$

$$\frac{\sigma_{3max}}{\sigma_{cm}} = 0.72 \left(\frac{\sigma_{cm}}{\lambda H} \right) \quad (14)$$

برشی تولید می‌شود؛ اما نکته‌ای که وجود دارد؛ برای تولید گروه‌هایی از نتایج آزمایش سه‌محوره، بایستی تعداد نمونه‌های زیادی آماده‌سازی کرد تا بر روی آن‌ها آزمایش سه‌محوره انجام داد و بر اساس آن پارامترهای مقاومت برشی تولید کرد. به‌عنوان مثال حداقل ۳۰ آزمایش مقاومت فشاری سه‌محوره بایستی انجام شود تا ۶ گروه برای تعیین ۶ مجموعه پارامتر مقاومت برشی به دست آید. از این‌رو آماده‌سازی نمونه و همچنین انجام آزمایش‌ها، زمان‌بر می‌شود.

برای عملیاتی کردن این موضوع، از ابتکار جدیدی استفاده شده است که هزینه‌ها و زمان انجام آزمایش به حداقل مقدار می‌رسد.

برای این منظور، پیشنهاد می‌شود که حداقل دوازده آزمایش تک‌محوره و سه‌محوره انجام شود. پس از انجام آزمایش‌ها اکنون برای تولید گروه‌های مختلف، نتایج آزمایش‌ها را می‌توان باهم ترکیب کرد و گروه‌های مختلفی تولید کرد. به شرطی که حداقل دو جفت از نتایج آزمایش مقاومت فشاری سه‌محوره با گروه‌های دیگر متفاوت باشد. (پیشنهاد دوازده آزمایش به این دلیل است که طبق رابطه

با مشتق گرفتن از σ'_1 نسبت به σ'_3 از رابطه (۴) و جانشین کردن نتایج در روابط (۸) و (۹) روابط (۱۰) و (۱۱) به دست می‌آیند که به ترتیب بیانگر تنش‌های نرمال و تنش برشی بر صفحه شکست هستند [۱].

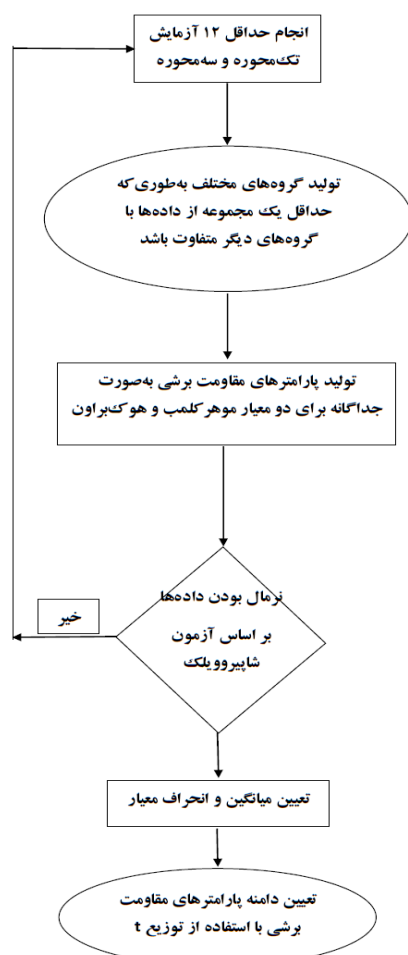
$$\sigma_n = \sigma'_3 + \frac{\sigma_{ci} \left(\frac{m_b \sigma'_3}{\sigma_{ci}} + S \right)^a}{2 + am_b \left(\frac{m_b \sigma'_3}{\sigma_{ci}} + S \right)^{a-1}} \quad (10)$$

۳- روش تحقیق

روش متداول و متعارف برای تعیین پارامترهای مقاومت برشی بدین ترتیب است که یک گروه شامل حداقل ۵ نمونه تحت تنش سه محوره قرار گرفته و پس از تعیین نتایج آزمایش سه محوره (تنش جانبی و تنش بیشینه)، از داده‌ها بر اساس معیارهای موهر کلمب و یا هوک‌براون رگرسیون‌گیری کرده و پارامترهای مقاومت برشی تخمین زده می‌شوند [۳۲]؛ اما در عمل، چنانچه دو گروه متفاوت از نتایج آزمایش سه محوره از یک نوع سنگ موجود باشد، هنگام رگرسیون‌گیری از نتایج آزمایش، پارامترهای مقاومت برشی نیز تغییر می‌کنند و نتایج از قابلیت اعتماد بالایی برخوردار نیستند. در این پژوهش، هدف تخمین دامنه‌ای است؛ که پارامترهای مقاومت برشی واقعی در آن قرار دارد. برای این منظور، در گام اول، بایستی، نمونه‌هایی از پارامترهای مقاومت برشی سنگ بکر را تولید کرد. برای این منظور بایستی نمونه‌های پنج‌تایی از سنگ موردنظر جهت آزمایش سه‌محوره، آماده‌سازی کرد و پس از انجام آزمایش سه‌محوره، چسبندگی و زاویه اصطکاک داخلی برای هر گروه تعیین شود و با این روش نمونه‌های آماری از پارامتر مقاومت

$$t = \frac{\bar{y} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \quad (16)$$

که t مساحت زیر منحنی توزیع نرمال، $\bar{y}$ و S به ترتیب میانگین و انحراف معیار نمونه و μ میانگین جامعه آماری و n تعداد نمونه است [۳۳]. پس از آن که مقادیر میانگین ($\bar{y}$) و انحراف معیار (S) از توصیف آماری نمونه‌های آماری تعیین شد. آنگاه می‌توان با حد اطمینان ۹۵ درصد دامنه واقعی پارامترهای مقاومت برشی $C(\mu(C))$ و $\phi(\mu(\phi))$ را تخمین زد. برای تعیین مقدار t از جدول زیر سطح منحنی توزیع t استفاده می‌شود. برای این منظور با در نظر گرفتن $t_{0.025}$ (زیرا آزمایش دو دنباله‌ای است) و همچنین درجه آزادی $d.f = n - 1$ که n تعداد نمونه‌های در نظر گرفته‌شده از جامعه آماری، می‌توان مقدار t را به دست آورد [۳۲]. شکل ۳ به صورت خلاصه روش کار را ارائه می‌دهد.



شکل ۳: فلوچارت روش تحقیق برای تخمین دامنه پارامترهای مقاومت برشی

ترکیب (رابطه ۱۵) از ۱۲ آزمایش (n) انجام‌شده، انتخاب ۵ آزمایش (k) برای گروه‌بندی و در نهایت تعیین پارامترهای مقاومت برشی، ۷۹۲ حالت، حق انتخاب برای مهندس طراح ایجاد می‌نماید [۳۳]. بنابراین دامنه انتخاب و گروه‌بندی برای مهندس طراح بسیار گسترده است.

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n - k)! k!} \quad (15)$$

پس از تولید گروه‌هایی با پنج و یا شش مجموعه از نتایج آزمایش، اکنون پارامترهای مقاومت برشی با استفاده از معیار موهر کلمب و یا هوک براون برای هر گروه تعیین می‌شود. بدیهی است پارامتر مقاومت برشی به‌دست‌آمده از هر گروه با گروه دیگر متفاوت است؛ بنابراین به تعداد گروه‌های در نظر گرفته‌شده، نمونه‌هایی تولید می‌شوند که باهم متفاوت و بیانگر پارامترهای مقاومت برشی هستند. در روش متداول، هر یک از گروه‌های مذکور یک نمونه پارامتر مقاومت برشی تولید می‌کند که از آن در تحلیل استفاده می‌شود؛ اما در روش توسعه داده‌شده، با انجام تعدادی آزمایش بیشتر می‌توان نمونه‌های آماری از پارامترهای مقاومت برشی را تولید کرد. در نتیجه، عدم قطعیت ناشی از ماهیت ذاتی سنگ کاهش می‌یابد. هر چه تعداد گروه‌ها بیشتر باشد، نمونه‌های آماری تولیدشده بیشتر و در نتیجه پارامترهای مقاومت برشی واقعی‌تری از جامعه آماری به دست می‌آید و دامنه موردنظر از قابلیت اعتماد بالاتری برخوردار است.

پس از تولید نمونه‌های آماری از پارامترهای مقاومت برشی، با استفاده از روش‌های آماری، مشخصه آماری شامل میانگین و انحراف معیار را برای چسبندگی و زاویه اصطکاک داخلی به‌دست می‌آید. اکنون می‌توان دامنه‌ای که پارامترهای مقاومت برشی واقعی در آن قرار دارد را با استفاده از توزیع t تعیین کرد. با این عمل نتیجه به‌دست‌آمده از بالاترین سطح اطمینان برخوردار است و عدم قطعیت کاهش می‌یابد. برای این منظور پارامترهای مقاومت برشی تولیدشده را به‌عنوان نمونه‌های انتخاب‌شده از یک جامعه آماری در نظر گرفته می‌شود. شرط استفاده از توزیع t نرمال بودن داده‌ها است. پس از بررسی نرمال بودن داده‌ها بر اساس آزمون شاپیرو ویلک، با استفاده از توزیع t (رابطه ۱۶) دامنه‌ای که پارامترهای مقاومت برشی واقعی در آن قرار دارد تخمین زده می‌شود.

۴- مطالعه موردی

در این مقاله تمرکز بر توسعه روشی کاربردی است؛ برای تخمین دامنه‌ای که پارامترهای واقعی مقاومت برشی سنگ بکر در آن قرار دارد؛ بنابراین نیاز به داده‌هایی استاندارد است تا نتایج به دست آمده قابل قبول و قابلیت تعمیم داشته باشند. در این مطالعه، از داده‌های مورد استفاده از تحقیقات یو [۳۴] که بر روی نمونه سنگ بکر انجام شده استفاده شد. نتایج در جدول ۱ نمایش داده شده است. آزمایش‌های مقاومت فشاری تک‌محوره و سه‌محوره بر روی نمونه ماسه-سنگ پینگ دینگ شان توسط دستگاه خودکنترل انجام شده است. طول و قطر نمونه‌ها به ترتیب ۱۰۰ و ۵۰ میلی‌متر و همه نمونه‌ها از یک بلوک تهیه شده‌اند. برای نمونه سنگ موردنظر، ۶ آزمایش تک‌محوره و ۸ آزمایش سه‌محوره انجام شده است. نتایج حاصل از آزمایش مقاومت فشاری تک-محوره، نشان می‌دهد، اگرچه نمونه‌ها از یک بلوک سنگی تهیه شده‌اند، اما هیچ‌کدام از نتایج باهم برابر نیستند. این موضوع ناشی از عدم قطعیت در ماهیت ذاتی سنگ است.

جدول ۱: داده‌های استفاده شده در این پژوهش [۳۴]

ماسه سنگ پینگ دینگ شان		ماسه سنگ پینگ دینگ شان	
$\sigma_3 (MPa)$	$\sigma_1 (MPa)$	$\sigma_3 (MPa)$	$\sigma_1 (MPa)$
۰	۱۰۲٫۹	۵	۱۵۷٫۷
۰	۱۰۳٫۴	۱۰٫۱	۱۹۷٫۱
۰	۱۰۳٫۶	۱۵٫۱	۲۲۴٫۳
۰	۱۲۲٫۴	۲۰٫۱	۲۳۸
۰	۱۲۸٫۷	۲۵	۲۵۸
۰	۱۲۹٫۴	۳۰	۲۸۳٫۵
		۳۰	۲۸۴٫۱
		۴۰	۳۰۵٫۷
مگا پاسکال: MPa			

۵- بحث

۵-۱- تولید گروه و تعیین پارامترهای مقاومت برشی بر اساس دو معیار شکست موهر کلمب و هوک براون

در گام اول، بایستی داده‌های موجود در جدول ۱ گروه‌بندی شوند. برای این منظور، داده‌ها در ۲۰ گروه که هر گروه حداقل هفت مجموعه داده قرار دارند، تقسیم شدند. مجموعه داده‌ها به صورت تصادفی انتخاب شده‌اند. با توجه به اهمیت تنش تک‌محوره در همه داده‌ها از مقاومت فشاری تک‌محوره استفاده شد. در بعضی از گروه‌ها از میانگین

مقاومت فشاری تک‌محوره که در جدول ۱ آمده استفاده شده است. برای مثال دو گروه از داده‌ها در جدول ۲ نمایش داده شده است.

جدول ۲: نمونه‌ای از گروه‌بندی داده‌های موجود در جدول ۱ برای تعیین پارامترهای مقاومت برشی

گروه ۲		گروه ۱	
تنش کمینه (MPa)	تنش بیشینه (MPa)	تنش کمینه (MPa)	تنش بیشینه (MPa)
۰	۱۱۵٫۱	۰	۱۲۹٫۴
۵	۱۵۷٫۷	۵	۱۵۷٫۷
۱۰٫۱	۱۹۷٫۱	۱۰٫۱	۱۹۷٫۱
۱۵٫۱	۲۲۴٫۳	۱۵٫۱	۲۲۴٫۳
۲۰٫۱	۲۳۸	۲۰٫۱	۲۳۸
۲۵	۲۵۸	۲۵	۲۵۸
۳۰	۲۸۴٫۱	۳۰	۲۸۴٫۱
		۴۰	۳۰۵٫۷

پس از گروه‌بندی داده‌ها، ابتدا پارامترهای مقاومت برشی بر اساس معیار موهر کلمب تعیین شده است. برای هر گروه، با استفاده از روش رگرسیون گیری و بر اساس روابط (۳) پارامترهای مقاومت برشی برای ۲۰ گروه موردنظر تخمین زده شد و نتایج در جدول ۳ نشان داده شده است. جدول ۳ نشان می‌دهد که پارامترهای مقاومت برشی به دست آمده در هر گروه، باهم متفاوت هستند. به عبارت دیگر در روش سنتی هر یک از سطرها در جدول ۳ به عنوان پارامترهای مقاومت برشی در تحلیل استفاده می‌شوند. در صورتی که نتایج در جدول نشان می‌دهد به علت عدم قطعیت ذاتی در سنگ نمی‌توان یک مقدار قطعی برای پارامترها در نظر گرفت.

جدول ۳: نمونه آماری تولید شده پارامترهای مقاومت برشی با استفاده از معیار موهر کلمب

ردیف	چسبندگی (مگا پاسکال)	زاویه اصطکاک داخلی (درجه)	ردیف	چسبندگی (مگا پاسکال)	زاویه اصطکاک داخلی (درجه)
۱	۳۱٫۶	۴۰٫۵	۱۱	۲۸٫۲	۴۳٫۲
۲	۳۳٫۲۵	۳۹٫۸	۱۲	۳۲٫۲	۴۰
۳	۳۰	۴۱٫۳	۱۳	۲۶٫۸	۴۳
۴	۳۴	۳۹	۱۴	۳۰٫۵	۴۲
۵	۳۲٫۴	۴۰٫۱	۱۵	۲۹٫۳	۴۲٫۶
۶	۳۴٫۶	۳۹	۱۶	۲۸٫۹	۴۱٫۶
۷	۳۲٫۶	۳۹٫۹	۱۷	۳۴٫۳	۳۸٫۹
۸	۲۸٫۹	۴۱٫۶	۱۸	۳۰٫۳	۴۱
۹	۳۰٫۴	۴۲	۱۹	۲۸٫۶	۴۲٫۷
۱۰	۲۹٫۶	۴۲	۲۰	۳۵٫۱	۳۸٫۸

روش‌های احتمالاتی، دامنه‌ای که پارامترهای مقاومت برشی واقعی در آن قرار دارد، به دست می‌آید.

۲-۵- تعیین دامنه پارامترهای مقاومت برشی با استفاده از توزیع t

برای تعیین دامنه‌ای که پارامترهای مقاومت برشی در آن قرار دارند، ابتدا با استفاده از روش‌های آماری، مشخصه آماری هر یک از پارامترهای مقاومت برشی موجود در جداول ۳ و ۴ به تفکیک تعیین می‌شود. نتایج در جداول ۵ و ۶ بر اساس معیارهای موهرکلمب و هوک‌براون نشان داده شده است.

مقدار میانگین و انحراف معیار پارامتر چسبندگی برای معیار موهرکلمب به ترتیب برابر با 31.07 (MPa)، 2.38 و برای زاویه اصطکاک داخلی به ترتیب برابر با 40.95 و 1.45 درجه است (جدول ۵). همچنین جدول ۶ توصیف آماری پارامترهای مقاومت برشی را بر اساس معیار هوک‌براون نمایش می‌دهد. مقدار میانگین و انحراف معیار پارامتر چسبندگی به ترتیب برابر با 42.76 (MPa) و 1.68 و برای زاویه اصطکاک داخلی برابر با 35.86 و 0.96 درجه است. مقایسه ضریب تغییرات موجود در جداول ۵ و ۶ نشان می‌دهد که میزان پراکندگی نتایج نسبت به مقدار میانگین بر اساس معیار هوک‌براون کمتر از معیار موهرکلمب است. این موضوع نشان می‌دهد که دقت نتایج به دست آمده بر اساس معیار هوک‌براون بالاتر است و این به دلیل غیرخطی بودن معیار هوک‌براون است.

جدول ۵: توصیف آماری پارامترهای مقاومت برشی به دست آمده بر اساس معیار موهرکلمب

تعداد نمونه	چسبندگی	زاویه اصطکاک داخلی
۲۰	۲۰	۲۰
کمینه مقدار	۲۶/۸۰	۳۸/۸۰
بیشینه مقدار	۳۵/۱۰	۴۳/۲۰
دامنه	۸/۳۰	۴/۴۰
میانگین	۳۱/۰۷	۴۰/۹۵
نما	۲۸/۹(۲)	۴۲(۳)
میانه	۳۰/۴۵	۴۱/۱۵
واریانس	۵/۶۸	۲/۱۰
انحراف معیار	۲/۳۸	۱/۴۵
ضریب تغییرات %	۷/۶۷	۳/۵۴

پس از تعیین نمونه‌های آماری بر اساس معیار موهرکلمب، اکنون پارامترهای مقاومت برشی بر اساس معیار هوک‌براون به دست می‌آید. برای تعیین چسبندگی و زاویه اصطکاک داخلی از روابط (۱۱) و (۱۲) استفاده شده است. با توجه به اینکه در این مطالعه نمونه سنگ موردنظر بکر است، در روابط از خصوصیات سنگ بکر استفاده شده است؛ بنابراین شاخص مقاومت زمین‌شناسی برابر با ۱۰۰ (نمونه ماسه‌سنگ بکر است) و فاکتور اغتشاش برابر با صفر در نظر گرفته شده است. همچنین با توجه به غیرخطی بودن معیار هوک‌براون (شکل ۲)، پارامترهای مقاومت برشی برای هر ۲۰ گروه در تنش کمینه برابر با ۴۰ مگا پاسکال (به عنوان نمونه) تخمین زده شد. نتایج در جدول ۴ نمایش داده شده است.

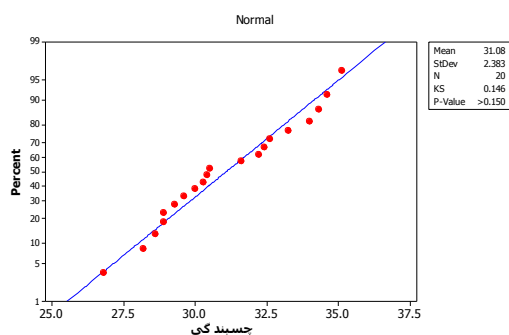
جدول ۴: نمونه آماری پارامترهای مقاومت برشی با استفاده از معیار هوک‌براون در تنش کمینه ۴۰ مگا پاسکال

ردیف	چسبندگی (مگا پاسکال)	زاویه اصطکاک داخلی (درجه)	ردیف	چسبندگی (مگا پاسکال)	زاویه اصطکاک داخلی (درجه)
۱	۴۳	۳۵/۷	۱۱	۴۲/۵	۳۶/۶
۲	۴۴/۲۵	۳۵	۱۲	۴۳/۱	۳۵/۴
۳	۴۱/۸	۳۶/۴	۱۳	۴۱/۴	۳۷/۳
۴	۴۴/۶	۳۴/۷	۱۴	۴۴	۳۵/۶
۵	۴۳	۳۵/۶	۱۵	۴۳/۳	۳۶
۶	۴۴/۸	۳۴/۵	۱۶	۴۱/۳	۳۶/۴
۷	۴۳/۹	۳۵	۱۷	۴۴/۷	۳۴/۵
۸	۴۱/۳	۳۶/۴	۱۸	۴۱/۹	۳۶/۳
۹	۳۹/۵	۳۷/۵	۱۹	۴۲/۹	۳۶/۲
۱۰	۳۹/۱	۳۷/۶	۲۰	۴۵	۳۴/۵

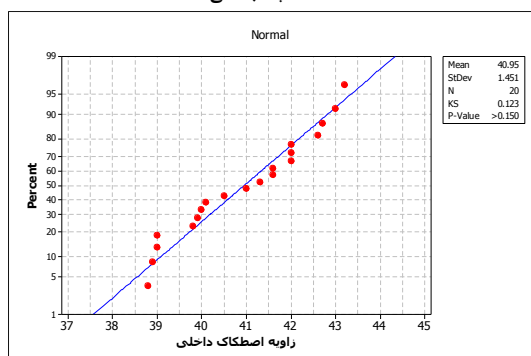
جدول ۴ نشان می‌دهد که با تغییر در ترکیب آزمایش در گروه‌های مختلف هیچ یک از نتایج به دست آمده باهم برابر نیستند و دلیل آن ناشی از عدم قطعیت موجود در ماهیت ذاتی سنگ و همچنین روابط موجود است. در روش متعارف هر یک از پارامترهای مقاومت برشی در ۲۰ ردیف نشان داده شده بیانگر مقاومت برشی سنگ موردنظر است و طبیعتاً تحلیل‌ها و طراحی از درجه قطعیت پایین تری برخوردار است. مقایسه جدول ۳ و ۴ نشان می‌دهد که پارامترهای مقاومت برشی به دست آمده، باهم متفاوت هستند و دلیل آن خطی بودن معیار موهرکلمب و غیرخطی بودن معیار هوک‌براون است؛ بنابراین به صورت جداگانه نتایج جداول ۳ و ۴ به عنوان نمونه‌های آماری در نظر گرفته می‌شود و با

جدول ۷: بررسی نرمال بودن داده‌ها

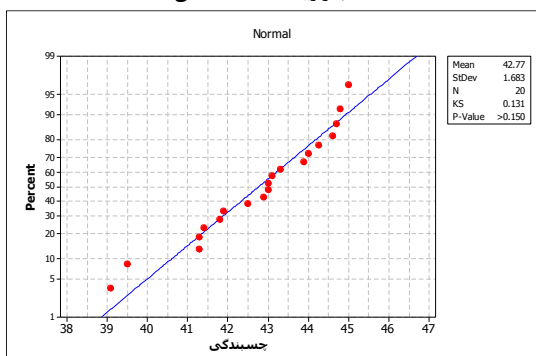
آزمون کولموگراف- اسمیرنوف	کشیدگی	چولگی		
>0.15	-1.01	0.15	چسبندگی	معیار موهر کلمب
>0.15	-1.32	-0.07	زاویه اصطکاک داخلی	
>0.15	-0.07	0.67	چسبندگی	
>0.15	-0.85	0.2	زاویه اصطکاک داخلی	معیار هوک براون



۴-الف چسبندگی



۴-ب زاویه اصطکاک داخلی



۴-ج چسبندگی

جدول ۶: توصیف آماری پارامترهای مقاومت برشی به‌دست‌آمده

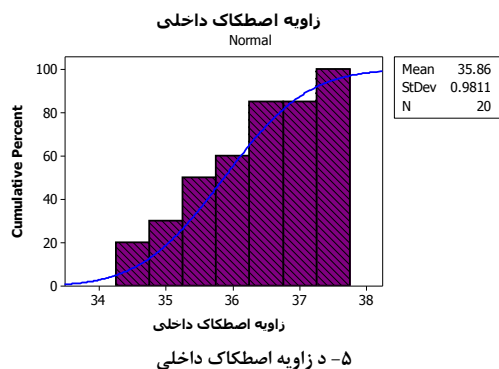
بر اساس معیار هوک براون در $\sigma_3 = 40MPa$

چسبندگی	زاویه اصطکاک داخلی	
۲۰	۲۰	تعداد نمونه
۳۹/۱۰	۳۴/۵۰	کمینه مقدار
۴۵/۰۰	۳۷/۶۰	بیشینه مقدار
۵/۹۰	۳/۱۰	دامنه
۴۲/۷۶	۳۵/۸۶	میانگین
۴۳ (۲)، ۴۱/۳	۳۶/۳، ۳۴/۵ (۳)	نما
۴۳/۰۰	۳۵/۸۵	میانه
۲/۸۳	۰/۹۶	واریانس
۱/۶۸	۰/۹۸	انحراف معیار
۳/۹۳	۲/۷۴	ضریب تغییرات %

اکنون با تعیین میانگین و انحراف معیار، می‌توان بر اساس رابطه (۱۶) دامنه‌ای که پارامتر مقاومت برشی واقعی در آن قرار دارند را به دست آورد؛ اما ابتدا بایستی نرمال بودن داده‌های موجود در جداول ۳ و ۴ را که به‌عنوان نمونه‌های آماری در نظر گرفته‌شده بررسی کرد. آزمون نرمال بودن داده‌ها در دو مرحله به شرح زیر انجام می‌شود:

۱- بررسی چولگی و کشیدگی داده‌ها، چنانچه چولگی و کشیدگی نمونه‌ها در دامنه $+2$ تا -2 قرار داشته باشد مرحله دوم قابل بررسی است [۳۳].

۲- استفاده از آزمون شاپیرو ویلک، در این آزمون برای بررسی نرمال بودن داده‌ها فرض صفر مبتنی بر اینکه توزیع داده‌ها نرمال است، در سطح خطای ۵ درصد آزمایش می‌شود. بنابراین اگر آماره آزمون بزرگ‌تر مساوی 0.105 تعیین شود، توزیع داده‌ها نرمال خواهد بود. برای آزمون نرمالیت فرض‌های آماری به‌صورت زیر تنظیم می‌شود [۳۳].
 H_0 : توزیع داده‌های مربوط به هر یک از متغیرها نرمال است.
 H_1 : توزیع داده‌های مربوط به هر یک از متغیرها نرمال نیست.
نتایج حاصل از آزمون نرمالیت در جدول ۷ نشان می‌دهد که چولگی و کشیدگی به‌دست‌آمده برای پارامترهای چسبندگی و زاویه اصطکاک داخلی در دامنه $+2$ تا -2 قرار دارند؛ بنابراین شرط اول مورد تأیید است. شرط دوم بررسی سطح معناداری حاصل از آزمون شاپیرو ویلک است. طبق نتایج به‌دست‌آمده در همه نمونه‌ها نتایج حاصل از آزمون بزرگ‌تر از 0.105 است. با اطمینان بالایی داده‌ها را می‌توان نرمال فرض کرد. شکل ۴ و ۵ به ترتیب سطح معناداری داده‌ها را در آزمون شاپیرو ویلک و همچنین هیستوگرام فراوانی تجمعی داده‌ها را نمایش می‌دهد.



۵- د زاویه اصطکاک داخلی

شکل ۵: توزیع تجمعی پارامترهای مقاومت برشی. الف و ب بر اساس معیار موهر کلمب، ج و د بر اساس معیار هوک براون

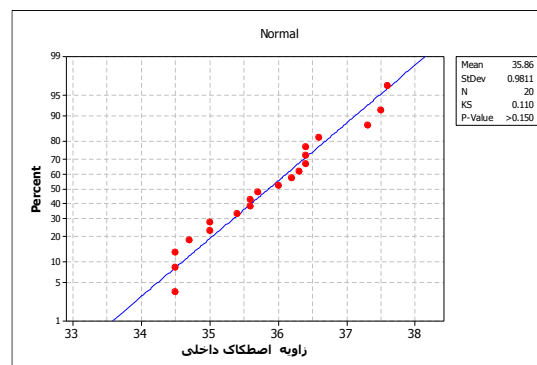
اکنون با توجه به نرمال بودن داده‌ها، با استفاده از رابطه (۱۵) و نتایج جدول ۵ و ۶، با حد اطمینان ۹۵ درصد دامنه‌ای که پارامترهای مقاومت برشی واقعی در آن تغییر می‌کند را تعیین و در جدول ۸ نمایش داده شده است. جدول ۸ نشان می‌دهد که اطلاعات به‌دست آمده از دو معیار باهم متفاوت هستند. همان‌طور که در بخش قبل ذکر شد، معیار شکست موهر کلمب خطی، است بنابراین پارامترهای مقاومت برشی ثابت (شکل ۱)، اما معیار شکست هوک براون غیرخطی است بنابراین پارامترهای مقاومت برشی در تنش‌های مختلف متفاوت است (شکل ۳). در مجموع معیار شکست هوک براون نتایج بهتری نسبت به معیار موهر کلمب ارائه می‌نماید.

جدول ۸: تعیین دامنه برای پارامترهای مقاومت برشی بر اساس

معیار موهر کلمب و هوک براون

معیار موهر کلمب	
چسبندگی (MPa)	زاویه اصطکاک داخلی (درجه)
30.82(C{31.32	40.8(p{41.1
معیار هوک-براون	
چسبندگی (MPa)	زاویه اصطکاک داخلی (درجه)
42.58(C{42.94	35.76(p{35.96

مقایسه جدول ۳ و ۴ که پارامترهای مقاومت برشی را بر اساس روش متداول نشان می‌دهد، با نتایج جدول ۸ که پارامترها را بر اساس روش توسعه‌یافته به‌دست آورده، نشان می‌دهد که روش توسعه‌یافته دارای برتری نسبت به روش متداول است؛ زیرا نمونه‌های آماری تولیدشده برای تعیین دامنه‌ای که پارامترهای واقعی در آن قرار دارد، از روش متداول گرفته شده است. که در شکل ۶ مشهود است، چنانچه از روش متداول استفاده شود هر یک از نتایج موجود در شکل ۶ می‌توانست در تحلیل استفاده شود. از روش توسعه‌یافته شده

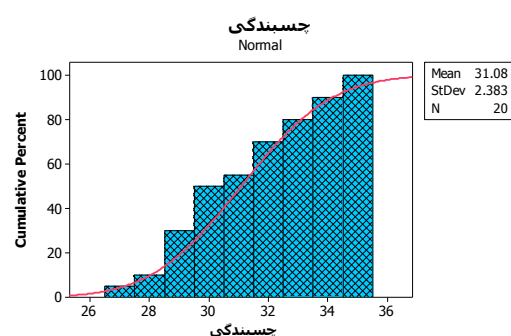


۴- د زاویه اصطکاک داخلی

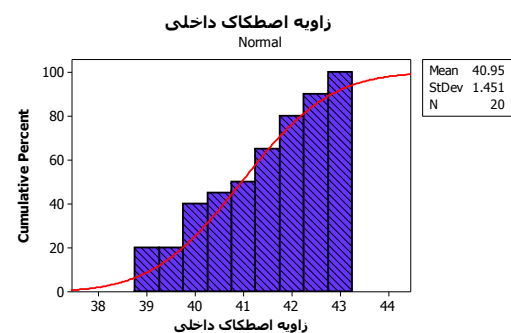
شکل ۴: نرمال بودن پارامترها بر اساس آزمون شاپیرو-ویلک.

الف و ب بر اساس معیار موهر کلمب، ج و د بر اساس معیار

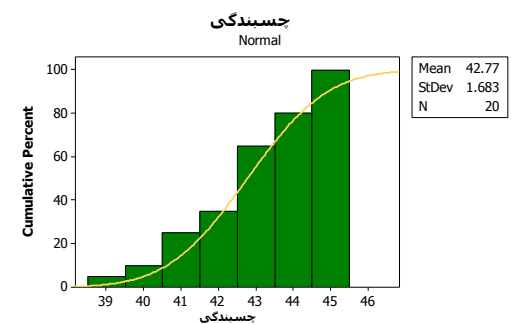
هوک براون



۵- الف چسبندگی



۵- ب زاویه اصطکاک داخلی



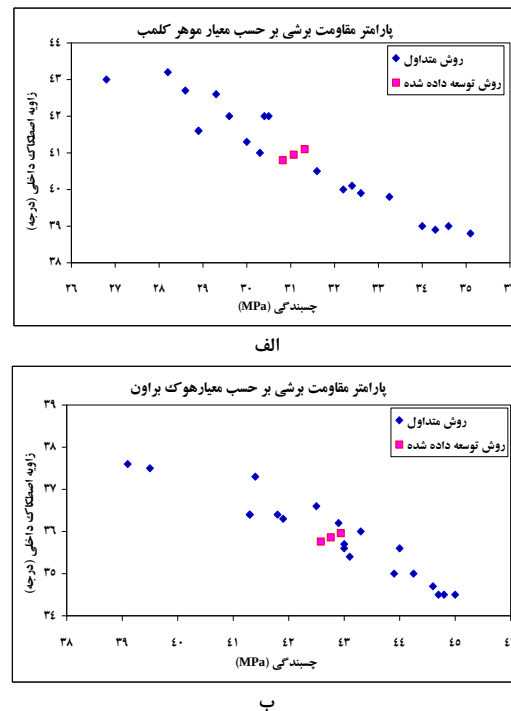
۵- ج چسبندگی

مقاومت برشی در آن قرار دارند با حد اطمینان ۹۵ درصد برای دو معیار شکست موردنظر به صورت جداگانه تعیین می‌شود. برای مطالعه موردی از نتایج آزمایش سه‌محوره که بر روی نمونه ماسه‌سنگ پینگ دینگ شان انجام شده، استفاده گردید. داده‌ها به ۲۰ گروه تقسیم و پارامترهای مقاومت برشی به دست آمد و در نهایت چسبندگی و زاویه اصطکاک داخلی بر اساس معیار شکست موهركلمب به ترتیب $30.82 > c > 31.32$ مگا پاسکال، $40.8 > \phi > 41.1$ درجه و برای معیار شکست هوک‌براون به ترتیب $42.58 > c > 42.94$ مگا پاسکال و $35.76 > \phi > 35.96$ درجه به دست آمد. در نتیجه پیش‌بینی پارامترهای مقاومت برشی با روش توسعه داده شده در مقایسه با روش مرسوم از قطعیت بیشتری برخوردار است و می‌تواند به عنوان یک روش در سایر پروژه‌ها مورد استفاده قرار گیرد.

مراجع

- [1] Carranza-Torres, C. (2021). Computational tools for the analysis of circular failure of rock slopes. IOP Conference Series: Earth and Environmental Science.
- [2] Shen, J., Karakus, M., & Xu, C. (2012). Direct expressions for linearization of shear strength envelopes given by the Generalized Hoek–Brown criterion using genetic programming. Computers and Geotechnics, 44, 139–146.
- [3] Labuz, J.F., & Zang, A. (2012). Mohr–Coulomb Failure Criterion. Journal of Rock Mechanics and Rock Engineering, 45, 975–979.
- [4] Shen, J., Priest, S.D., & Karakus, M. (2012). Determination of Mohr–Coulomb Shear Strength Parameters from Generalized Hoek–Brown Criterion for Slope Stability Analysis. Journal of Rock Mechanics and Rock Engineering, 45(1), 123–129.
- [5] Rafiei Renani, H., & Martin, C.D. (2020). Slope Stability Analysis using Equivalent Mohr–Coulomb and Hoek–Brown criteria. Rock Mechanics and Rock Engineering, 53, 13–21.
- [6] Mohammadi, M., & Tavakoli, H. (2015). Comparing the generalized Hoek–Brown and Mohr–Coulomb failure criteria for stress analysis on the rocks failure plane. Geomechanics and Engineering, 9(1), 115–124.
- [7] Brown, E.T. (2008). Estimating the mechanical properties of rock masses. In: Proceedings of the 1st southern hemisphere international rock mechanics symposium: SHIRMS 2008, Perth, Western Australia 1, 3–21.

با قطعیت بالاتر و در یک دامنه واقعی‌تر می‌توان پارامترهای مقاومت برشی را تعیین کرد. این نکته برتری روش توسعه داده شده نسبت به روش مرسوم است.



شکل ۶: مقایسه پارامترهای مقاومت برشی بر اساس روش متداول و روش توسعه داده شده. الف: بر اساس معیار موهركلمب، ب: بر اساس معیار هوک‌براون

۶- نتیجه‌گیری

در روند تحلیل و طراحی یک سازه سنگی به روش تعادل حدی، تعیین پارامترهای مقاومت برشی از اهمیت بسیار خاصی برخوردار است؛ زیرا تغییر در پارامترهای مقاومت برشی باعث تغییر در فاکتور اطمینان است. برای پیش‌بینی این پارامترها از نتایج آزمایش سه‌محوره و بر اساس دو معیار شکست موهركلمب و هوک‌براون استفاده می‌شود؛ اما پیش‌بینی نتایج همواره با عدم قطعیت همراه هستند. این موضوع سبب تردید مهندسان برای استفاده از نتایج در تحلیل‌ها و طراحی می‌شود. در این مقاله برای یافتن نتایج دقیق‌تر و قابل‌اعتمادتر یک روش کاربردی توسعه داده شد. برای این منظور با تشکیل گروه‌هایی از ترکیب تعدادی از داده‌های آزمایش سه‌محوره و بر اساس معیارهای شکست موهركلمب و هوک‌براون، نمونه‌های تصادفی از پارامترهای مقاومت برشی تولید شد و سپس با تعیین توصیف آماری نمونه‌ها و بررسی نرمال بودن داده‌ها، در نهایت با استفاده از توزیع t دامنه‌ای که پارامترهای

- [20] Kim, K., & Gao, H. (1995). Probabilistic approaches to estimating variation in the mechanical properties of rock masses. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences Geomech Abstr*, 34, 111–120.
- [21] Chen, Y., Lin, H., Li, S., Cio, Y., Yong, W., Wang, Y., & Zhao, Y. (2022). Shear expression derivation and parameter evaluation of Hoek–Brown criterion. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 22(77), <https://doi.org/10.1007/s43452-022-00403-x>
- [22] Sari, M., (2009). The stochastic assessment of strength and deformability characteristics for a pyroclastic rock mass. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 46(3), 613– 626.
- [23] Sari, M., Karpuz, C., & Ayday, C. (2010). Estimating rock mass properties using Monte Carlo simulation: Ankara andesites. *Computers & Geosciences*, 36(7), 959–969.
- [24] Idris, M., Saiang, A.D., & Nordlund, E. (2011). Numerical Analyses of the Effects of Rock Mass Property Variability on Open Stope Stability. *American Rock Mechanics Association*.
- [25] Rabiei Vaziri, M., Azizabadi, H.R., & Kariminasab, S. (2015). Estimating the Shear Strength Parameters of Rock Mass using Monte Carlo Method. " *Iranian Journal of Mining Engineering*, 10(27), 69- 80. (In Persian)
- [26] Mehrishal, S.A., (2021). Development of an analytical method for the calculation of the Mohr-Coulomb failure envelope. *Journal of Analytical and Numerical Methods in Mining Engineering*, 11(27), 19-29. (In Persian)
- [27] Li, S., Zhang, Y., Cao, M., & Wang, Z. (2022). Study on Excavation Sequence of Pilot Tunnels for a Rectangular Tunnel Using Numerical Simulation and Field Monitoring Method. *Journal of Rock Mechanics and Rock Engineering*, 55, 3507–3523.
- [28] Cai, M., Hou, P.Y., Zhang, X.W., & Feng, X.T. (2021). *Post-peak Stress–Strain curves of brittle hard rocks under axial-strain-controlled loading. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 147, 104921.
- [29] Ling, W., Zuoan, W., & Shen, J. (2016). Charts for estimating rock mass shear strength parameters. *Geomechanics and Engineering*, 10(3), 257- 267.
- [30] Mohammadi, M., (2021). Developing an Applied Method for Determining Geomechanical Parameters of Rock Mass Considering Uncertainty. *Journal of Mineral Resources Engineering and the Iranian Mining Engineering*, 6(3), 99-114.
- [8] Wyllie, D.C., & Mah, C. (2004). *Rock slope engineering: civil and mining*" 4th edn. Spon Press, New York.
- [9] Hoek, E. (1983). Strength of jointed rock masses. *Geotechnique*, 33(3), 187–223.
- [10] Hoek, E. (1990). Estimating Mohr–Coulomb friction and cohesion values from the Hoek–Brown failure criterion. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 27(3), 227–229.
- [11] Amoushahi, S., Grenon, M., Locat, J., & Turmel, D. (2018). Deterministic and probabilistic stability analysis of a mining rock slope in the vicinity of a major public road — case study of the LAB Chrysotile mine in Canada. *Canadian Geotechnical Journal*, 55(10), 290-310.
- [12] Bakhtiyari, E., Almasi, A., Cheshomi, A., & Hassanpour, J. (2017). Determination of Shear Strength Parameters of Rock Mass using Back Analysis Methods and Comparison of Results with Empirical Methods. *The Journal of Scientific and Engineering Research*2, 11, 35-42.
- [13] Hoek, E., & Brown, E.T. (1997). Practical estimates of rock mass strength. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 34(8), 1165–1186.
- [14] Park, P., & Michalowski, R.L. (2021). Three-dimensional stability assessment of slopes in intact rock governed by the Hoek-Brown failure criterion. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 137, 104522.
- [15] Yang, S.Q., Chen, M., Jing, H.W., Chen, K.F., & Meng, B. (2017). A case study on large deformation failure mechanism of deep soft rock roadway in Xin'An coal mine, China. *Engineering Geology*, 217, 89-101.
- [16] Fu, W., & Liao, Y. (2010). Non-linear shear strength reduction technique in slope stability calculation. *Computers and Geotechnics*, 37, 288–298.
- [17] Yang, X.L., & Yin, J.H. (2010). Slope equivalent Mohr–Coulomb strength parameters for rock masses satisfying the Hoek–Brown criterion. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 43(4), 505–511.
- [18] Chen, Y., & Lin, H. (2019). Consistency analysis of Hoek–Brown and equivalent Mohr–coulomb parameters in calculating slope safety factor. *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*, 78, 4349–4361.
- [19] Zachariiev, G., (2016). A Statistical Theory of the Damage of Materials. *Modern Mechanical Engineering*, 6, 129-150.

[33] Douglas, C., (2003). Applied Statistics and Probability for Engineers 6th Edition. John Wiley & Sons, Inc.

[34] You, M., (2010). Mechanical characteristics of the exponential strength criterion under conventional triaxial stresses." International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, 47(2), 195–204.

[31] Balmer, G., (1952). A general analytical solution for Mohr's envelope. Am Soc Test Mater, 1269–1271.

[32] Yang, S., Tian, W. & Ranjith, P.G. (2017). Experimental Investigation on Deformation Failure Characteristics of Crystalline Marble Under Triaxial Cyclic Loading. Journal of Rock Mechanics and Rock Engineering, 50, 2871–2889.